



ACUERDO NO. 1998 CON FECHA DEL 07 DE JUNIO DE 2016 DEL INSTITUTO DE EDUCACIÓN DEL ESTADO DE AGUASCALIENTES

# "USO DEL ORIGAMI PARA FORTALECER EL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO EN ESTUDIANTES DE PRIMARIA"

TESIS PARA: **DOCTORADO EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN**

PRESENTA(N): **ERLIN BLANDÓN RIVAS**

DIRECTOR(A) DE TESIS: **DRA. MARIANA FERNÁNDEZ REINA**

Aguascalientes, septiembre de 2022

ASUNTO: Carta de liberación de tesis.

Aguascalientes, Ags., 1 de diciembre de 2022.

LIC. ROGELIO MARTÍNEZ BRIONES  
UNIVERSIDAD CUAUHTÉMOC PLANTEL AGUASCALIENTES  
RECTOR GENERAL

P R E S E N T E

Por medio de la presente, me permito informar a Usted que he asesorado y revisado el trabajo de tesis titulado:

**"Uso del origami para fortalecer el pensamiento geométrico  
en estudiantes de primaria"**

Elaborado por el **Mtro. Erlin Blandón Rivas**, considerando que cubre los requisitos para poder ser presentado como trabajo recepcional, para obtener el grado de **Doctorado en Ciencias de Educación**.

Agradeciendo de antemano la atención que se sirva a dar la presente, quedo a sus apreciables órdenes.

ATENTAMENTE

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Mariana', with a stylized flourish at the end.

**Dra. Mariana Fernández Reina**

A Quien Corresponda  
Presente

Asunto: Responsiva de integridad académica

Yo, Erlin Blandón Rivas, con matrícula ADCO17287, egresado del programa Doctorado en Ciencias de la Educación, de la Universidad Cuahtémoc, plantel Aguascalientes, identificado con IFE-INE o CC, N°1077434415, pretendo titularme con el trabajo de tesis titulado: Uso del origami para fortalecer el pensamiento geométrico en estudiantes de primaria.

**Por la presente Declaro que:**

- 1.- Este trabajo de tesis, es de mi autoría.
- 2.- He respetado el Manual de Publicación APA para las citas, referencias de las fuentes consultadas. Por tanto, sus contenidos no han sido plagiados, ni ha sido publicado total ni parcialmente en fuente alguna. Además, las referencias utilizadas para el análisis de la información de este Trabajo de titulación están disponibles para su revisión en caso de que se requiera.
- 3.- El Trabajo de tesis, no ha sido auto-plagiado, es decir, no ha sido publicado ni presentado anteriormente para obtener algún grado académico previo o título profesional.
- 4.- Los datos presentados en los resultados son reales, no han sido falseados, ni duplicados, ni copiados y por tanto los resultados que se presentan en el trabajo de tesis, constituirán aporte a la realidad investigada.
- 5.- De identificarse fraude, datos falsos, plagio información sin citar autores, autoplagio, piratería o falsificación, asumo las consecuencias y sanciones que de mi acción se deriven, sometiéndome a la normatividad vigente de la Universidad Cuahtémoc, plantel Aguascalientes, Instituto de Educación de Aguascalientes, la Secretaria de Educación Pública, Ministerio de Educación Nacional y/o las autoridades legales correspondientes.
6. Autorizo publicar mi tesis en el repositorio de Educación a Distancia de la Universidad Cuahtémoc, plantel Aguascalientes.

*Erlin Blandón R.*  
Erlin Blandón Rivas

*eblandon88@gmail.com - 3046691161*

## ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE GENERAL .....	2
ÍNDICE DE TABLAS .....	6
ÍNDICE DE FIGURAS .....	7
AGRADECIMIENTO.....	8
DEDICATORIA.....	9
RESUMEN .....	10
ABSTRACT .....	11
INTRODUCCION .....	12
CAPÍTULO I PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	17
1.1. Formulación del problema .....	18
1.1.1. Planteamiento del problema .....	18
1.1.2. Contextualización del problema.....	28
1.1.3. Definición del problema .....	32
1.2. Pregunta de Investigación .....	38
1.2.1. Pregunta general .....	38
1.2.2. Preguntas específicas .....	38
1.3. Justificación.....	38
1.3.1. Conveniencia.....	39
1.3.2. Relevancia social.....	40

1.3.3. Implicaciones prácticas.....	41
1.3.4. Utilidad metodológica .....	42
1.3.5. Utilidad teórica.....	43
1.4. Hipótesis .....	44
CAPÍTULO II MARCO TEÓRICO .....	45
2.1 Teoría educativa que sustenta el estudio .....	46
2.2 Análisis conceptual del pensamiento geométrico .....	47
2.2.1 Conceptualizaciones sobre el pensamiento geométrico .....	47
2.2.2 Niveles del pensamiento geométrico .....	49
2.2.3 Didáctica de la geometría para el desarrollo del pensamiento geométrico.....	53
2.2.4 Etapas del proceso de enseñanza del pensamiento geométrico.....	56
2.2.5 Pensamiento geométrico en la competencia matemática .....	58
2.2.6. El pensamiento geométrico en los estándares de competencia de Colombia.....	60
2.3 Análisis conceptual del origami.....	62
2.3.1 Definición de origami .....	62
2.3.2 Orígenes del origami .....	63
2.3.3 Clasificación del origami .....	63
2.3.4 Uso didáctico del Origami para potenciar el pensamiento geométrico .....	65
2.4 Estudios empíricos .....	67
2.5. Marco legal de la investigación.....	83
CAPÍTULO III MÉTODO.....	85

3.1. Objetivos .....	86
3.1.1. Objetivo General.....	86
3.1.2. Objetivos Específicos .....	86
3.2. Participantes.....	87
3.3. Escenario .....	89
3.4. Instrumentos de recolección de información.....	89
3.5. Procedimiento .....	92
3.6. Diseño del método.....	93
3.6.1. Diseño .....	94
3.6.2. Momentos del estudio.....	95
3.6.3. Alcance del estudio.....	96
3.7. Tratamiento experimental. Programa: Origami, un universo de posibilidades.....	96
3.8. Operacionalización de las variables .....	101
3.8. Análisis de datos .....	103
3.9. Consideraciones éticas .....	104
CAPÍTULO IV RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN .....	106
4.1. Resultados del pretest.....	109
4.2. Resultados del postest .....	114
CAPÍTULO V DISCUSIÓN .....	119
CONCLUSIONES.....	129
REFERENCIAS.....	137

ANEXOS .....	151
Anexo 1 Instrumento de validación.....	152
Anexo 2 Constancias de validación por expertos .....	161
Anexo 3. Instrumento (Versión final).....	166
Anexo 4. Programa Origami: un universo de posibilidades .....	173
Anexo 5. Registro fotográfico .....	195
Anexo 6. Consentimiento informado.....	211
Anexo 7 Tablas de datos.....	212

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1 Niveles del pensamiento geométrico .....	50
Tabla 2 Etapas del proceso de enseñanza del pensamiento geométrico .....	56
Tabla 3 Clasificación del origami .....	64
Tabla 4 Distribución de los estudiantes de tercer grado .....	87
Tabla 5 Distribución de la muestra .....	88
Tabla 6 Baremo para la interpretación de promedios .....	90
Tabla 7 Baremo para la interpretación del coeficiente confiabilidad .....	92
Tabla 8. Descriptores para los niveles de pensamiento geométrico .....	99
Tabla 9 Operacionalización de la variable .....	102
Tabla 10 Distribución de la muestra por sexo .....	108
Tabla 11 Distribución de la muestra por edad .....	108
Tabla 13 Pruebas de normalidad.....	112
Tabla 14 Prueba t de Student para muestras independientes. Pretest .....	113
Tabla 15 Resultados para la variable pensamiento geométrico. Grupos control y experimental. Postest.....	114
Tabla 16 Resultados para la variable pensamiento geométrico. Grupo experimental. Pretest y postest .....	116
Tabla 17 Prueba t de Student para muestras independiente. Postest .....	118

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 Tipos de conocimiento numérico implícitos en la competencia matemática.....	59
Figura 2 Procedimiento seguido en la investigación .....	93
Figura 3 Diagrama del diseño con pretest, postest y grupos intactos .....	95
Figura 4 Distribución de la muestra por sexo.....	108
Figura 5 Distribución de la muestra por edad .....	109
Figura 6 Resumen de resultados del pretest por dimensiones. Grupos control y experimental .....	111
Figura 7 Resumen de resultados del pretest para la variable pensamiento geométrico. Grupos control y experimental .....	111
Figura 8 Resumen de resultados del postest por dimensiones. Grupos control y experimental .....	115
Figura 9 Resumen de resultados del postest para la variable pensamiento geométrico. Grupos control y experimental .....	116

## **AGRADECIMIENTO**

Esta investigación representa más que un logro profesional, un sueño, que en primera medida deseo agradecerle a Dios, dador de vida, por sostenerme con buena salud y vida para la culminación de esta formación académica.

Mi entera gratitud a la Universidad Cuauhtémoc, sus ejemplares docentes que me dotaron de herramientas y excelente conocimiento para avanzar en el proceso formación profesional de forma asertiva y a mi asesora de manera especial, la Dra. Mariana Fernández Reina, que con su experiencia, aportes y orientación contribuyó en la culminación de esta investigación.

A la Institución Educativa Distrital Alemania Unificada, de la ciudad de Bogotá D.C – Co, que permitió el desarrollo de esta. De igual manera a los estudiantes participantes, que con sus aportes y disposición se obtuvieron resultados valiosos para la construcción del conocimiento.

## **DEDICATORIA**

A mi madre, Emiliana Rivas Cuesta (que en paz descansa), por sembrar en mí el deseo insaciable de superación, a mi hijo Deyhel Santiago Blandón Asprilla, mi motivación constante, a ellos, que siempre son fuente de energía e inspiración en mi vida.

A cada familiar y amigo que indirecta o directamente fueron motivación con sus palabras de aliento para continuar.

## RESUMEN

El pensamiento geométrico es fundamental para el desarrollo integral de los estudiantes, ya que este expresa parte de las competencias matemáticas que facilitan la vida a las personas en todos los contextos. Por tal motivo, el objetivo de esta investigación fue evaluar los efectos de un programa de origami, sobre el pensamiento geométrico de los estudiantes del grado tercero de primaria de la Institución Educativa Distrital Alemania Unificada, de Bogotá, Colombia. Para lograrlo se estableció una metodología cuantitativa, abordando una investigación de tipo evaluativa con diseño cuasiexperimental, con pretest, postest y grupos intactos, en la que participaron 55 estudiantes del tercer grado matriculados en el periodo académico 2022, a quienes se aplicó una prueba de conocimiento para recolectar la información sobre sus niveles de pensamiento geométrico antes de la aplicación del Programa Origami: un universo de posibilidades (pretest), y luego de este (postest). Este instrumento fue validado por el juicio de cinco expertos y sometido a pruebas de confiabilidad, alcanzando un coeficiente de Kuder-Richardson de 0,702, indicando confiabilidad alta. Los resultados revelaron que al inicio del estudio los grupos fueron homogéneos, pero luego de la participación del grupo experimental en el programa, se encontraron diferencias significativas, obteniendo en la t de Student un p valor de  $0,000 < \alpha (0.05)$  a favor del grupo experimental, que pueden ser atribuidas a su participación en esta intervención. Se concluye que el programa basado en origami fortalece el pensamiento geométrico de los estudiantes de tercer grado de la Institución Educativa Distrital Alemania Unificada.

**Palabras Claves:** origami, pensamiento geométrico, estudiantes de primaria, papiroflexia, competencias matemáticas.

## ABSTRACT

Geometric thinking is fundamental for the integral development of students, since it expresses part of the mathematical skills that make life easier for people in all contexts. For this reason, the objective of this research was to evaluate the effects of an origami program on the geometric thinking of students in the third grade of primary school of the Institución Educativa Distrital Alemania Unificada in Bogotá, Colombia. To achieve this, a quantitative methodology was established, addressing evaluative research with quasi-experimental design, with pretest, posttest and intact groups, in which 55 third grade students enrolled in the 2022 academic period participated, to whom a knowledge test was applied to collect information on their levels of geometric thinking before the application of the Origami Program: a universe of possibilities (pretest), and then of this (posttest). This instrument was validated by the judgment of five experts and subjected to reliability tests, reaching a Kuder-Richardson coefficient of 0.702, indicating high reliability. The results revealed that at the beginning of the study the groups were homogeneous, but after the participation of the experimental group in the program significant differences were found, obtaining in Student's t a p value of  $0.000 < \alpha (0.05)$ , in favor of the experimental group, which can be attributed to their participation in this intervention. It is concluded that the origami-based program strengthens the geometric thinking of third-grade students of the Institución Educativa Distrital Alemania Unificada.

**Keywords:** origami, geometric thinking, elementary school student, origami, mathematical skills.

## INTRODUCCION

A lo largo de los años, el estudio de la geometría como rama de las ciencias matemáticas dentro del proceso escolar, se ha mantenido como un área en la que mayoritariamente los estudiantes presentan dificultades, dada la naturaleza del conocimiento implícito. Por criterio general, dichas insuficiencias se asocian con la adopción de modelos de enseñanza convencionales desde los institutos, mismos que se vienen implementando desde hace varias generaciones y que actualmente continúan aplicándose. En virtud de estos planteamientos tiene lugar la presente investigación, cuya temática se fundamenta en proponer procesos de enseñanza centrados en metodologías más adecuadas para aprender matemáticas, como es la intervención didáctica mediante las técnicas artísticas del origami, a fin de favorecer el desarrollo del pensamiento geométrico en los estudiantes de etapa primaria.

Al respecto, la panorámica del problema viene dada por las continuas prácticas pedagógicas tradicionalistas dentro de la didáctica de la geometría, basadas en clases magistrales para la transmisión de conocimientos relativos al campo, carentes de oportunidades para la exploración, detección y comprobación de funciones dentro de un proceso; lo cual acarrea un uso limitado de recursos que incentiven la creatividad e imaginación de los estudiantes, específicamente en el grado tercero de educación básica primaria, quienes, en general, presentan debilidades para la comprensión de los contenidos sobre geometría.

Fundamentalmente, y en relación con esto, los problemas y dificultades que los estudiantes de primaria encuentran respecto al entendimiento de temas geométricos están directamente asociados con el estilo de enseñanza que reciben en el aula escolar, puesto que los estudiantes aprenden matemáticas mediante las experiencias que proveen sus maestros en clases, por lo tanto, la disposición del estudiante hacia el estudio de contenidos sobre matemáticas se condiciona según la enseñanza proporcionada en el entorno escolar. Por su

parte, dentro de la didáctica de las matemáticas, muchas veces el profesorado considera que el producto final del proceso educativo reside en la transferencia de contenidos para que el estudiante memorice conceptos, teoremas y propiedades mecánicamente; en ocasiones de manera aislada con relación a otras áreas del saber, o sin una contextualización clara sobre la importancia de las matemáticas para la vida cotidiana.

Ante esta situación, esta investigación se desarrolla en un centro educativo en el que los procesos de enseñanza de la geometría no discrepan de la realidad planteada, donde el profesorado de matemáticas usualmente concibe el proceso escolar como un sistema de transmisión de estos conocimientos disciplinarios, sin énfasis en el diseño de estrategias metodológicas que faciliten la exploración, curiosidad y manipulación; tanto para la comprensión de contenidos, como para el fortalecimiento de las competencias matemáticas de los estudiantes, quienes constantemente perciben la geometría como un ámbito de escasa utilidad práctica y difícil abordaje durante los procesos de estudio en la educación formal.

Además, los lineamientos curriculares descritos por el Ministerio de Educación Nacional de la República de Colombia, (en adelante MEN), (1998), imponen la necesidad de mantener el sentido espacial intuitivo que es propio de las matemáticas, desde un proceso de mediación activo para la geometría, en el cual se otorgue importancia a las actividades del estudiante y la interacción con su mundo. En general, es sustancial que el profesor de matemáticas se involucre de forma activa en la indagación y búsqueda de soluciones a las problemáticas situadas en el aula con relación a dicha asignatura, de manera tal que se procure la optimización del proceso de aprendizaje sobre contenidos geométricos, mediante el uso de recursos didácticos y de entretenimiento, como el plegado del papel, a través de lo cual se conceda un acercamiento entre el estudiante y el conocimiento técnico, a la vez que se facilite el entendimiento e incremente su motivación hacia el estudio de esta ciencia.

En cuanto a las motivaciones de la investigación, es imperante que los centros escolares se activen respecto a la implementación de metodologías innovadoras, por lo que se percibe el potencial didáctico de la papiroflexia como herramienta de aprendizaje sobre contenidos geométricos. Por estas razones surge el presente trabajo, cuyo objetivo general es evaluar los efectos de un programa de origami sobre el pensamiento geométrico de los estudiantes del grado tercero de primaria de la Institución Educativa Distrital Alemania Unificada, de Bogotá, Colombia, para potenciar el propicio desarrollo de este tipo de pensamiento.

En relación con estas ideas, la relevancia del tema orbita en torno al desarrollo consciente y sistematizado del pensamiento geométrico-espacial del infante, como base para la comprensión profunda de sistemas precisos. En esencia, es imprescindible que desde los centros escolares se promuevan asertivamente estrategias y actividades para el fortalecimiento del pensamiento espacial en el niño y la niña, como parte fundamental de su pensamiento científico, ya que la utilidad del pensamiento geométrico tiene lugar cuando el estudiante representa y manipula información durante el aprendizaje (Reyes, s.f.), y es a través de estos conocimientos que puede solventar problemas relacionados con la ubicación, orientación, distribución de espacios, uso de la lógica, entre otras soluciones.

En lo que concierne con la postura teórica por la cual se orienta esta investigación, los elementos considerados en la propuesta corresponden con el Modelo Teórico de desarrollo del pensamiento geométrico de Van Hiele (1999), conformado por una serie de niveles que determinan el grado de comprensión y adquisición de competencias matemáticas en el estudiante. En este mismo sentido, como fuentes principales de información para este trabajo, se toman en cuenta los aportes teóricos y empíricos de autores como Cerda et al. (2017), Corrales y Rojas (2021), Cuadrillero (2021), Figueroa et al., (2021), Gamboa y Vargas (2013), Gur y Kobak (2017), Iglesias y Ortiz (2015), Kögce (2020), Lang, (2010), Quispe (2022), entre otros; quienes resaltan la necesidad de promover una didáctica contextualizada de las matemáticas y la

efectividad de incorporar el origami como herramienta de apoyo al aprendizaje de los contenidos geométricos. Asimismo, se consideran los estándares y lineamientos sobre las competencias matemáticas propuestas por el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Calidad de la Educación (ICFES) (2013), con fundamento en las orientaciones del MEN (2006).

En cuanto a sus aspectos metodológicos, esta es una investigación de tipo evaluativa, con diseño cuasiexperimental y de enfoque cuantitativo, que está enmarcado dentro del paradigma del positivismo. Este enfoque utiliza métodos y técnicas cuantitativas para someter a medición las variables de estudio, cuyos resultados se analizan estadísticamente. Esto se llevó a cabo a través de la aplicación del método hipotético deductivo para la manipulación de las variables y verificación de las hipótesis, con base en las teorías establecidas.

De esta manera, la estructura del presente documento se establece en cinco capítulos: el primero, referido al planteamiento del problema general, formulación del problema, contextualización del estudio, pregunta de la investigación, justificación y sistema de hipótesis. El segundo capítulo corresponde con el marco teórico, en el que se incorporan las bases y fundamentos que argumentan las ideas en torno a las variables de estudio, en tal sentido, se describen las conceptualizaciones acerca del pensamiento geométrico, niveles, didáctica de la geometría y procesos asociados con el pensamiento geométrico en el aula escolar; asimismo, se realiza un análisis conceptual sobre el origami, sus orígenes, clasificación y utilidad didáctica; para luego mencionar los antecedentes que conforman el marco referencial de la investigación.

Seguidamente, el tercer capítulo menciona los criterios metodológicos del estudio, donde se señalan los objetivos de la investigación, participantes implicados, escenario seleccionado, instrumentos de recolección de datos, procedimiento, diseño del método, operacionalización de las variables, técnicas de análisis aplicadas y consideraciones éticas. En lo que concierne con el cuarto capítulo, se sistematizan los datos sociodemográficos de los participantes, así como los resultados para cada una de las dimensiones e indicadores que conforman las variables de

estudio. Finalmente, se integran en el capítulo quinto las discusiones emanadas del análisis de resultados, y las conclusiones del estudio.

## **CAPÍTULO I PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA**

En este capítulo se aborda la formulación genérica del problema de investigación. Se parte desde el planteamiento de la situación que motiva la realización del presente trabajo, la contextualización del estudio mediante el esbozo de referencias históricas, tanto internacionales como nacionales y locales, para identificar el conocimiento actual que se maneja en torno al problema; asimismo, se establecen datos sobre la evidencia empírica que permite valorar cómo se ha ido abordando el tema, para luego formular la pregunta de investigación, seguida por la justificación del estudio e hipótesis del mismo.

## **1.1. Formulación del problema**

---

### 1.1.1. Planteamiento del problema

La didáctica de las matemáticas ha sido, desde tiempos precedentes, un campo de amplio interés, que lleva implícita la noción de proveer al estudiante de conocimientos que le sirvan para desenvolverse de forma efectiva en diferentes situaciones de su vida. De hecho, se afirma que desde su gesta, el ámbito de la enseñanza de las matemáticas trata de suministrar al niño ciertos contenidos que pudiera potencialmente aplicar con inmediatez para resolver cuestiones vinculadas con sus experiencias cotidianas, incorporando de este modo, la necesidad de dirigir la enseñanza sobre el conteo, resolución de operaciones entre clases de números, manejo de medidas, determinación de perfiles y volúmenes, así como conducir al aprendiz a que se inicie en distintos escenarios de índole comercial (García, 1980). La realidad del mundo contemporáneo exige que la formación en el campo de las matemáticas y, puntualmente en el aprendizaje de geometría, un área del conocimiento que permea diferentes competencias, procure mayores niveles de calidad en cuanto a la organización de su enseñanza.

En este sentido, históricamente se ha puesto en evidencia que los estudiantes desarrollan rechazo natural por la disciplina de matemáticas y la rama de geometría, que desata paulatinamente otras dificultades asociadas con la capacidad de obtener información espacial

(habilidad para pensar a través de imágenes visuales o espaciales), insuficiencia en la capacidad para realizar representaciones icónicas, procesar información o efectuar análisis perceptivos; que progresivamente conducen a que los estudiantes, por criterio general, muestren apatía y deficiente nivel de destreza en la aplicación de conceptos previos, lo que traduce un déficit en los conocimientos esenciales para la realización de tareas matemáticas, que incluyen la ignorancia ante los principios algorítmicos, falta de conocimientos sólidos de hechos concretos, errores de asociación mental, rigidez del pensamiento individual o aplicación incorrecta de procedimientos para el cálculo y el uso de símbolos para solventar problemas (Rico, 1995).

En efecto, la concepción genérica sobre la didáctica de las ciencias matemáticas debe perseguir un objetivo eminentemente práctico y utilitario, en el que se enseñe al discente a dominar elementos del conteo y la numeración para desempeñar funciones relativas al mundo físico que le rodea, no obstante, la educación tradicional en el área de matemáticas ha permitido orientar un estilo de enseñanza lineal, en el cual se le enseñaba al estudiante aquello que debía hacer mediante recetas e instrucciones dadas por el maestro.

Dichos escenarios han venido desencadenando que la asignatura de matemáticas sea vista con carácter mecanizado, guiado por fórmulas o ecuaciones que el estudiante en ocasiones llega a aplicar de manera inconsciente, obviando de este modo que la didáctica de esta disciplina guarda consigo objetivos aún más trascendentales y, de hecho, se ha comprobado que el empleo de estrategias tradicionales en la enseñanza de las matemáticas dificulta la adquisición eficaz de competencias esenciales como el aprendizaje autodirigido por el alumno, gestión del conocimiento propio, facultades para la asociación de conceptos, trabajo colaborativo, así como la capacidad de automotivación hacia los contenidos académicos por parte de quien aprende (Vílchez, 2007).

De la misma manera, los argumentos de Godino (2013) permiten reflexionar acerca del verdadero significado de la didáctica de las matemáticas, que debe orientar la actuación práctica

del docente en este campo y suscitar su mejora progresiva, donde se ha revelado que dentro de la educación matemática se carece de un consenso unificado acerca de las teorías efectivas que permitan establecer un diseño instruccional que contrarreste las dificultades que todavía persisten en esta asignatura escolar; ya que, palpablemente se reconoce que el trayecto hacia lograr que el aprendizaje de contenidos en matemáticas continúa siendo actualmente un desafío mundial, cuya base insta la necesidad apremiante de involucrar el perfeccionamiento de las prácticas del profesorado en la enseñanza de las matemáticas para apoyar el aprendizaje en materia (Cerde et al., 2017).

En relación con lo anteriormente planteado, los métodos tradicionalistas en los que, de forma recurrente se han apoyado los docentes en el área de matemáticas, han tenido repercusiones en la forma en la que los estudiantes perciben la asignatura, aunado con las dificultades que desarrollan para el aprendizaje de conceptos técnicos relativos a este campo. Por lo tanto, existe la necesidad a nivel mundial de potenciar la competencia matemática en los estudiantes y la estimulación del alumno ante esta disciplina, ya que, si bien se reconoce la significancia de las matemáticas para el desarrollo educativo, existen datos estadísticos que acentúan la necesidad particular de motivar la gestión didáctica y las metodologías aplicadas dentro de la enseñanza de las matemáticas, para consolidar el estudio de esta ciencia tan crucial para la vida estudiantil.

Al respecto, según resultados arrojados desde evaluaciones internacionales recientes, tales como el Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA) implementada mundialmente en alumnos de 15 años por la OCDE dentro de sus países integrantes y otras naciones asociadas, así como los informes del Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias (TIMSS), se ha reportado un índice de reprobación en matemáticas mayor a 50% en diversos casos escolares (Lumbreras et al., 2021).

Concretamente, la evaluación de la competencia en matemáticas dentro de las pruebas PISA se configura sistematizadamente en orden de medir cuatro dominios fundamentales en el campo: cantidad, cambio y relaciones, espacio y forma, e incertidumbre y datos. Para el presente trabajo de investigación, se pretende principalmente abordar las dificultades observadas en los procesos de aprendizaje de la geometría, o área de espacio y forma, como parte esencial de las ciencias matemáticas, donde precisamente se reconoce la presencia de resultados académicos preocupantes en los estudiantes, derivados de pruebas diagnósticas y diversos exámenes a los que son sometidos para ratificar su conocimiento en el área. En este sentido, dentro del documento *Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales*, publicado por el MEN, el aprendizaje de la geometría queda sustentado en tres procesos esenciales que se vinculan con el desarrollo de habilidades mentales idóneas para el estudio de la geometría: la visualización, justificación y construcción geométrica (Urquina, 2004).

En términos generales, el proceso de aprendizaje de los elementos implícitos en la geometría viene a ser una cuestión completa que se vuelve compleja para muchos, debido a que pone en tensión varios polos que convergen en el desarrollo cognitivo del alumno; por un lado, se tiene el subproceso de visualización, donde se perciben los objetos para crear o asignar significado a estos y ser capaz de determinar las propiedades geométricas que poseen; mientras que, por otro lado, confluyen la generalización y abstracción como habilidades mentales relativas al subproceso de justificación, en los que la persona experimenta la descontextualización de los objetos estudiados (Roca, 2014).

Al analizar la situación resultante de las pruebas de suficiencia en el ámbito de matemáticas, con énfasis en la conceptualización de nociones geométricas, se conforma una marcada carencia de visión espacial en el alumnado, cuya base subyace en la falta de agudeza en la percepción visual motivada por las dificultades individuales para superar procesos más elementales como la visualización. Adicionalmente, el aprendizaje de geometría se ve

condicionado por la dimensión actitudinal del discente, que en ocasiones se muestra reacio cuando se invita a pensar, existiendo una tendencia en la que el aprendiz opta por pensar lo menos posible y procurar resolver sus dilemas de la forma más fácil que encuentre.

Lo anterior llega a ser un factor limitante para el desarrollo del potencial creativo del aprendiz, porque de manera general, como lo expresa Roca (2014), se aprecia que este se inclina por aplicar fórmulas, sin detenerse a analizar enunciados ni hacer cuestionamientos acerca del trasfondo que los postulados geométricos guardan consigo, esto, sin duda, se manifiesta como un elemento determinante en la calidad de la gestión del conocimiento en matemáticas y geometría, puesto que se reducen las posibilidades para que el estudiante amplíe su capacidad para manejar abstracciones sobre sus ideas y su mundo, continuando con las estrategias y procedimientos mecánicos que caracterizan a la didáctica tradicional de estos contenidos.

Entretanto, indica Rey (2004) que las dificultades para la comprensión de conceptos en contextos geométricos por el alumnado, en ciertos casos se deben a desacuerdos asociados con el propio lenguaje matemático utilizado por los profesores, lo que vuelve complejo el reconocimiento de terminología específica del área y, por ende, la obtención de fundamentos conceptuales acordes con los postulados del pensamiento lógico-matemático que se trata de fomentar, conllevando consecuentemente al desarrollo de dificultades de tipo visual presentes en un contexto cargado de ideas predominantemente abstractas, donde los modelos o ejemplos a los que recurre el docente al momento de explicar conceptos geométricos suelen aplicarse de manera rotunda ante los estudiantes y puede obstaculizar la idónea construcción de los términos técnicos.

Por su parte, la problemática circunscrita en el aprendizaje de la geometría incluye las dificultades que se presentan cuando los docentes acuden a convencionalismos en las representaciones gráficas de objetos geométricos dentro de sus clases, aunado con la descontextualización de estos conceptos frente a la realidad percibida por el alumno, lo que

origina conflictos para la demostración en geometría, fortalecimiento del pensamiento geométrico y el abordaje de casos de resolución práctica dentro del área (Dal Maso, 2007).

Las tendencias actualmente observadas en el aula de matemáticas, demuestran que los niños suelen experimentar rechazo frente a estos contenidos, porque se percibe como una asignatura compleja, cuyos conceptos son vistos como abstractos, cargados de fórmulas y operaciones a las que no siempre encuentran sentido, pues poco logran conectarlas con su vida cotidiana, pese a estarlo en gran medida, generando de esta forma desmotivación ante la asignatura, junto con otros factores tanto intrínsecos como extrínsecos que llevan en ocasiones al fracaso escolar (Nieto et al., 2010).

A la misma vez, se parte de la necesidad de adaptar las metodologías docentes utilizadas en la asignatura de matemáticas según sean las necesidades e intereses que presenta el grupo, para ello, se debe apostar por metodologías activas a través de las que se permita ofrecer mayor diversidad en los aprendizajes y se ajusten los sistemas conservadores para la enseñanza (Guerrero, 2014). En términos amplios, la problemática que se pretende abordar desde este trabajo alude a la necesidad de promover la competencia matemática y el pensamiento geométrico en el alumno, por ser saberes indispensables para su actuación en sociedad y herramientas para el desarrollo del pensamiento, y la capacidad de resolución de problemas (Macías, 2007). Por su parte, como soporte a la situación, se indica que existe un alto porcentaje de alumnos quienes manifiestan dificultades al intentar realizar tareas elementales de matemáticas (Mullis et al., 2016) porque muchas veces los niños no son conscientes de la amplia aplicabilidad que tiene esta disciplina, la cual constituye uno de los ejes vertebradores del currículo educativo oficial ya que contribuye al desarrollo cognitivo del discente y a su idónea interacción con el medio.

Desde una perspectiva regional, la didáctica de las matemáticas en Latinoamérica presenta dificultades que coinciden con las antes mencionadas, lo que condiciona el pleno desarrollo del

pensamiento geométrico en el discente, de hecho, uno de los aspectos que preocupan en el contexto de aprendizaje de las matemáticas reside en la falta de pruebas estandarizadas con las que se pueda estudiar el rendimiento de los estudiantes en cuanto a la aritmética y geometría, intensificando de esta forma la necesidad de establecer iniciativas de difusión de información respecto a la geometría orientada a los escolares (Rebollo & Rodríguez, 2006).

Por su parte, en Colombia específicamente, el bajo rendimiento estudiantil en materia de matemáticas, evidenciado desde los resultados de las pruebas internacionales TIMSS o las pruebas nacionales Saber, ha permitido determinar la presencia de errores conceptuales en geometría por parte del alumnado en educación básica, además de demostrar una carente habilidad para situar adecuadamente estas teorías explicativas con el ambiente diario en el que convive el estudiante, careciendo de un sentido en el conocimiento impartido en las aulas colombianas (Benítez, 2007).

Además, se percibe que los estudiantes de educación básica exteriorizan serias dificultades para hacer representaciones de cuerpos geométricos en el plano, lo que traduce una evidente carencia de apropiación de conceptos que puede igualmente afectar la habilidad del alumno para visualizar propiedades geométricas en ciertos cuerpos que pueden ser representados o imaginados (Blanco & Crespo, 2007), por lo tanto, las metodologías de apoyo al aprendizaje de la geometría plana y tridimensional en el ambiente escolar deben ser ajustadas para corresponder con las situaciones descritas.

A saber, de acuerdo con cifras publicadas por el MEN en 2017, a través del ICFES, durante la aplicación de las pruebas SABER 2017 a cargo de la Institución Educativa Distrital Alemania Unificada (en adelante IEDAU) de la región de Bogotá D.C. revelan un reducido rendimiento académico en el área de matemáticas, ya que, según la escala de valoración resultante de las competencias básicas, la mayoría de los estudiantes se encuentran entre un nivel insuficiente o mínimo de competencias, mientras que unos pocos presentan un grado satisfactorio de

conocimientos en el área. En virtud de ello, dado que los puntajes en matemáticas obtenidos por los estudiantes del país se ubicaron en un promedio de 351 puntos (nivel mínimo), se requiere fortalecer los procesos de enseñanza y aprendizaje en esta asignatura.

Igualmente a nivel local, uno de los problemas que generalmente se detecta al momento de tratar nociones de geometría en el entorno escolar, concretamente en la etapa de primaria y secundaria, suele estar ligado con el reconocimiento de conceptos elementales como perímetro, distancias, diagonales, ángulos, polígonos, aristas, poliedros, volumen, vértice, área, entre otras; debido a que, en diversas ocasiones, los estudiantes de etapa básica no son capaces de identificar adecuadamente elementos constitutivos en una figura geométrica cuando son examinados, demostrándose de esta manera que los aprendices tienen dificultades para señalar, definir e interpretar información geométrica y/o espacial; lo que, sin lugar a dudas, conduce a una inminente necesidad de establecer reflexiones respecto a las técnicas empleadas para la enseñanza y aprendizaje de la geometría (Rodríguez, 2014).

Tal y como lo afirman Scaglia y Moriena (2005), los fundamentos geométricos tienen una doble naturaleza que integra el aspecto conceptual y figural, cuyo dominio de estos conocimientos es insuficiente en diversos casos escolares, por cuanto se debe procurar la formación de estructuras mentales a través de la enseñanza en matemáticas, atendiendo el reto primario de redimensionar las prácticas habituales de los docentes en las que se limita el favorecimiento de las relaciones entre términos vinculados con la geometría y el espacio (Berthélot & Salin, 1994).

Desde una mirada generalizada, Pellerrey (1992) considera que los métodos utilizados para direccionar la enseñanza de las matemáticas se han adaptado constantemente ante las demandas de la sociedad en orden de atender a las solicitudes de una población estudiantil en continuo crecimiento. Esta misma situación ha ocurrido en un país tan diverso como Colombia, donde el contexto social, caracterizado por el auge tecnológico que permite acelerar los ritmos

de aprendizaje y, asimismo, engrandecer las expectativas e intereses de los jóvenes estudiantes, lo que juega un papel fundamental dentro de la dinámica educativa nacional.

Partiendo de lo anterior, se hace necesario realizar un cambio en el método de enseñanza para el fortalecimiento de las competencias matemáticas en el aula, en especial en lo concerniente al aprendizaje de la geometría, dado que las metodologías didácticas en el país parecen concentrarse específicamente en el desarrollo de módulos académicos que resaltan el reforzamiento de estructuras aditivas y multiplicativas en la formación de las matemáticas. Es por esto que existen ciertas dificultades para que los estudiantes consoliden aprendizajes significativos en el contexto de la geometría, lo que enclaustra la adquisición de competencias básicas que permitan mejorar los niveles de desempeño, según el grado que cursan.

Por todo lo expuesto, se percibe la necesidad de atender a la problemática mediante la configuración de las estrategias tradicionalmente aplicadas en la praxis educativa para la enseñanza de la geometría, donde se integren estrategias didácticas basadas en la innovación e incorporación de elementos lúdicos y creativos como factores que permitan corresponder con las actuales metodologías activas en educación. Para el presente caso de investigación, se estudia el potencial didáctico de las técnicas del origami como elemento motivador en el aprendizaje de nociones geométricas en el alumnado de etapa básica, en un ambiente de enseñanza que integre recursos de papiroflexia en la mediación pedagógica.

A este respecto, el origami se representa como un estilo de arte oriundo de Japón que consiste en realizar pliegues en papel, cuyas destrezas creativas y particularidades para la manipulación de conceptos versátiles fundan una base vinculada con la innovación tecnológica, que a su vez implica un alto componente matemático, que ha sido implementado como herramienta de apoyo para diversas áreas del saber, como el diseño arquitectónico, la ingeniería y sus estructuras, nanotecnología o teorías proporcionales y en educación formal, donde se han

detectado las extensas aplicaciones del origami dentro de las clases de matemáticas y otras materias del currículo (Pivaral, 2018).

En este contexto, las técnicas para el doblado del papel aplicadas en las clases de geometría, permiten promover la curiosidad e inspirar al estudiante para la producción de diseños creativos con los que manipule efectivamente los conceptos teóricos y las relaciones geométricas implicadas en el origami como técnica didáctica (Pereira & Dos Santos, 2006). Particularmente, las facultades de este tipo de arte en la educación de las matemáticas admiten que el alumnado pueda trabajar el nivel de abstracción, el pensamiento geométrico y la estética, porque al utilizar teoremas y axiomas propios de la geometría, se permite al alumno la confección de figuras sencillas, construcción de rectas y el diseño de modelos tridimensionales (Mejía & Prada, 2008).

Sobre la base de las ideas previas, ante una distinguida necesidad de complementar la enseñanza de la geometría en los ambientes educativos actuales, en los cuales se demuestra una tendencia en la que la mayoría de clases se destinan al aprendizaje de conceptos poco significativos y desviados de acciones creativas y manipulativas sobre los conceptos de figuras y espacio, se precisa aplicar una metodología lúdica eficiente en la que el alumno sea guiado en el proceso de empoderamiento de nociones geométricas y su potencial creativo, concibiendo el origami como recurso instruccional apto para el logro de estos objetivos a través del juego y la manipulación del papel (Cuadrillero, 2021).

En dependencia de los planteamientos realizados, se destaca la necesidad de implementar estrategias con un componente motivador que respalde la didáctica de esta ciencia y, progresivamente, modifique las actitudes que habitualmente el alumno tiene hacia las matemáticas, ante las dificultades para asimilar nociones geométricas (Fonseca & Gamboa, 2010).

### 1.1.2. Contextualización del problema

Desde hace décadas atrás, se ha reconocido la importancia de la enseñanza de la geometría y los procesos implicados en el aprendizaje de las nociones matemáticas, la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO) (1986), planteaba aquello que se debía enseñar en el área de geometría dentro del aula, sucesivamente, en décadas seguidas la estructura de este campo científico no había sido modificada, repitiendo de esta forma los mismos métodos y procedimientos aplicados en la didáctica y dejando de lado la verdadera razón de esta disciplina curricular. Dado el análisis anterior, se proponía a partir de la fecha, hacer cambios significativos en el área, generando impacto y réplicas de la estrategia de transformación a nivel mundial, sin embargo, de manera recurrente, se acentuaba la incertidumbre en el aula en torno a diversas interrogantes acerca de qué, cómo y para qué enseñar geometría en las escuelas (UNESCO, 1986).

Específicamente en Colombia, durante la década de los 80 y 90, las iniciativas para potenciar el pensamiento geométrico se convertían cada vez en un reto escolar mayor, y fue esencialmente que a nivel gubernamental se propusieron, dentro de los componentes curriculares, una serie de estándares básicos de competencia, derechos básicos de aprendizaje y malla curricular para la enseñanza asertiva de las competencias matemáticas en el aula, sin embargo, en las pruebas nacionales presentadas a través del ICFES cada año, se evidenciaba que no se avanzaba significativamente ante los resultados esperados por parte de los estudiantes dentro de esta área del saber (MEN, 1998).

Consecutivamente, los años posteriores permitieron consumir un modelo de enseñanza de la geometría basado en la transmisión y explicación de modelos, así como en la demostración de los conceptos geométricos dentro de un contexto dado, donde los escenarios reales para la enseñanza de matemáticas y geometría en el aula de educación básica y media, igualmente continuaban mostrando inconsistencias en las prácticas de enseñanzas, caracterizados por la

ausencia de diseños de programas instruccionales que permearan las prácticas docentes de forma significativa, resaltando además, la falta de utilización del material concreto dentro del aula para lograr dinamizar los encuentros académicos entre los miembros de la comunidad escolar (Jiménez & Gutiérrez, 2017).

Por su parte, la enseñanza de las matemáticas fue modificando sus bases tras el auge del enfoque formativo basado en competencias, dicho modelo curricular se instauraba en el país y fue paulatinamente adoptado por todas las instituciones del territorio nacional. Este plantea la inmersión de estrategias o mediadores didácticos en el aula, a través de los cuales se puedan evaluar los impactos en el proceso de enseñanza-aprendizaje, pero para entonces se establecía la falta de innovación en el aula como un factor determinante en el tratamiento de brechas en el territorio nacional (Espinosa et al., 2017).

Por otro lado, los acontecimientos reportados durante la aplicación de las pruebas PISA de 2012 a 2018 en el área de matemáticas conceden un análisis claro acerca del desempeño de los estudiantes colombianos en esta disciplina, cuyos resultados podían deberse a la ausencia de vinculación entre las teorías y prácticas en la asignatura de matemáticas. En este orden, Colombia presentaba resultados preocupantes y se afirmaba que un 74% de los estudiantes colombianos evaluados eran capaces de completar solo preguntas básicas, por lo cual, a nivel de la gerencia educativa, se empezó a proponer el reto orientado a mejorar la calidad de la educación nacional (Castro, 2021). Al analizar que las pruebas PISA exigen a los estudiantes la capacidad para pensar efectivamente acerca de los problemas planteados en diferentes situaciones, se toma como foco el fortalecimiento de las matemáticas y otras áreas.

Al respecto del conocimiento que se tiene actualmente en torno al problema, la geometría es uno de los componentes principales en la formación en matemáticas, debido a que favorece congruentemente el desarrollo del pensamiento espacial en los estudiantes (Corrales & Rojas,

2021), la misma llega a potenciar significativamente las habilidades del estudiante para aplicar pensamiento geométrico en distintas situaciones de su propia vida.

En otro orden de ideas, el empleo del arte del origami dentro de los procesos de aprendizaje en las aulas de educación básica, se centra en la práctica de estas técnicas de plegado del papel, las cuales se consolidan como una estrategia útil y efectiva para asociar nociones específicas sobre contenidos de geometría y matemáticas, donde el profesorado pueda enseñar intencionalmente la geometría al compenetrar la papiroflexia dentro de sus clases (Valencia, 2013). Los beneficios y cualidades didácticas del origami son variados, ya que no solo constan de un alto valor motivador o atractivo para el estudiante, sino que coadyuva al desarrollo de su potencial creativo al momento de situar al aprendiz a que diseñe modelos propios mediante el doblado de las formas e invitarlo a indagar acerca de las conexiones existentes entre la geometría plana y espacial (Antúnez & Antúnez, 2017).

Asimismo, para Rodríguez (2014) los beneficios que conlleva la aplicación didáctica del origami en el aprendizaje de contenidos en geometría, conceden al estudiante una mejora significativa en su comprensión y aprehensión de conceptos necesarios para la elaboración de diversas figuras, así como el apoyo al entendimiento profundo sobre las formas, manejo de proporciones y actitud del estudiante hacia la actuación y participación activa en el aula de matemáticas. En adición, es innegable la presencia que tiene la geometría en múltiples ámbitos de los sistemas productivos de la actual sociedad del conocimiento (diseño industrial, producción, ingeniería, arquitectura y estructura, topografía, geografía, entre otras), por lo que se argumenta en este sentido, que el uso sistematizado de la papiroflexia o plegado del papel como estrategia didáctica para las matemáticas, se ha visto avalado y se considera ampliamente el valor de este arte como estímulo fundamental para el desarrollo de distintas facultades intelectuales y físicas en el aprendiz (Cañadas et al., 2003).

Por su parte, la contemporaneidad de este problema se circunscribe alrededor de veinte años, en los que ciertos autores a lo largo del tiempo han venido estudiando el valor del origami o papiroflexia -un arte surgido en Japón en el año 1680 como una técnica manipulativa de finalidad estética para hacer figuras en papel- como una herramienta útil para explicar las matemáticas y precisamente, en los procesos de estimulación del pensamiento geométrico en niños y jóvenes (Blanco & Otero, 2005, Royo, 2002), en beneficio de los procesos académicos llevados a cabo en el aula.

En relación con las ideas anteriores, los indicios históricos que se registran desde la génesis del origami permiten aseverar que, durante muchos años en épocas antiguas, la técnica del plegado de papel era realizada únicamente por las personas que pertenecían a la élite social japonesa, ya que la finalidad del origami era plenamente artística y solo los integrantes de la alta clase contaban con acceso a desarrollarse en estas labores en función del alto precio que tenían los recursos del papel para el momento, posteriormente, este arte fue trasladándose a otras regiones del continente asiático, hasta que, pese a su origen artístico, se fue aplicando en diferentes naciones y culturas, hasta ser adaptada como una herramienta de apoyo a la enseñanza de las matemáticas (Royo, 2002) y ha sido mundialmente contextualizado como un modelo para el aprendizaje de la geometría.

Hoy en día, se evidencian investigaciones y propuestas de innovación docente en el ámbito de matemáticas en los que se toman en cuenta las ventajas atribuidas al origami para el desarrollo intelectual en términos de visualización y representaciones, identificando la existencia de aspectos básicos dentro del origami, visto como herramienta didáctica, en los que emergen fundamentos matemáticos a tener en cuenta para el aprendizaje de la geometría: papiroflexia modular, axiomas de constructibilidad y diseño de figuras (Aguirre, 2017), a través de los cuales se ofrecen patrones de actuación a los estudiantes que conceden para ellos una rápida

comprensión de los contenidos técnicos, así como la formalización de constructos esencialmente abstractos.

### 1.1.3. Definición del problema

El contexto seleccionado para esta investigación se corresponde con la Institución Educativa Distrital Alemania Unificada (IEDAU), una institución de carácter oficial que se encuentra ubicada geográficamente en la ciudad de Bogotá D.C., de la República de Colombia. La IEDAU se especializa en ofrecer educación en etapa básica y atiende un promedio de 250 estudiantes. La muestra de esta investigación estuvo constituida por un grupo de grado tercero, niños con edades en promedio de 9 a 10 años, los cuales demuestran interés por interactuar con técnicas de aprendizaje novedosas e inclinadas hacia el manejo de estrategias complementarias en el aula.

De la misma manera, como característica resaltante de los estudiantes del tercer grado, se evidencia el bajo rendimiento en la asignatura de matemáticas en reportes suministrados por el análisis que se realiza en los aciertos y desaciertos en materia de calidad educativa, durante el cuatrienio de las evidencias recolectadas en torno a las evaluaciones realizadas por el MEN cada año. Adicionalmente, cabe destacar dentro de la problemática actual, que no se realizan acciones institucionales consistentes con las que se tienda a mejorar la calidad de competencias evaluadas.

El rendimiento mostrado por los estudiantes de grado tercero coincide con las dificultades que generalmente se presentan durante el proceso de aprendizaje de la geometría, que en sí mismo, representa un sumario cognitivo holístico que requiere la concreción de habilidades mentales específicas (visualización, generalización, abstracción, justificación). La problemática suscitada en el contexto de esta investigación, tiene lugar en las dificultades que tienen estos alumnos para la visualización, ya que se observa que en muchos casos resulta difícil para ellos percibir adecuadamente ciertos elementos geométricos o figuras planas dadas. Además, la

asignatura de matemáticas en la institución se imparte de forma tradicional, basada meramente en clases donde el profesor asigna y corrige ejercicios a la vez que se utilizan los ejemplos genéricos que se encuentran en los libros de texto y problemarios, mientras que los estudiantes toman apuntes en sus libretas personales, que les servirán posteriormente como medio de estudio.

En cuanto a la integración de materiales novedosos en el contexto, si bien en las clases de matemáticas se trabaja con ciertos recursos escolares generales, hoy por hoy se continúa manejando en el aula una metodología convencional, donde los estudiantes de grado tercero escasamente utilizan material de construcción en clases de matemáticas. Asimismo, los docentes en general conciben que, a través de los estilos convencionales de la clase magistral impartida, así como la asignación de pruebas escritas, son instrumentos fiables para medir los aprendizajes del estudiante en esta etapa, que luego se mantienen en los modelos tradicionales de educación.

Paralelamente a esta situación, se evidencia que los profesores del área de matemáticas exponen una notoria falta generalizada de motivación en esta asignatura (Roca, 2014), por lo tanto, desde esta investigación se hace hincapié en la búsqueda de estrategias efectivas para impartir la materia desde la dinámica y la lúdica aplicada al conocimiento, donde se fomente la participación grupal y la creatividad a través del arte del origami como motor de aprendizajes geométricos, dentro de una vinculación de estas técnicas manipulativas que permita incentivar al estudiante en clases de geometría. En virtud de lo planteado, surge esta investigación para dar paso a diversas formas que permitan fortalecer el área de geometría a través de la estrategia del doblado del papel, con el propósito de determinar en qué medida el origami potencia el pensamiento geométrico de los estudiantes de educación básica a través de la implementación de planes de estudio basados en la práctica de la papiroflexia.

Aunado a lo anterior, la responsabilidad primordial del docente en el aula de matemáticas es desarrollar estrategias que permitan fortalecer competencias geométricas en los estudiantes

atendidos. Dado que en el país se refleja un proceso de aprendizaje en esta área, que avanza de forma inadecuada ante los medidores externos de calidad, se visualiza que una posible causa de estas dificultades se debe a la utilización de estrategias pedagógicas tradicionales para el aprendizaje de geometría, que distan de la contextualización que debe procurarse en el aula, sumado con el desconocimiento por parte de un segmento del profesorado respecto a la relación estrecha que existe entre el origami con la enseñanza de las matemáticas, docentes que se mantienen aún escépticos ante los modelos vanguardistas para la enseñanza de las ciencias prácticas, lo que implica un bajo nivel en las pruebas y desempeño insuficiente del alumnado en el periodo académico.

De esta manera, para muchos docentes de matemáticas resulta complejo acceder a la planificación de diferentes actividades y estrategias con las que se ajusten sus patrones de enseñanza, donde cabe considerar entre estos supuestos, a la técnica del doblado del papel conocida como origami, que se propone utilizar recursos alternativos que posibiliten que las clases de geometría sean más dinámicas y significativas para los estudiantes, sirviendo también de apoyo para el docente, ya que la experiencia ha demostrado que si el estudiante es motivado durante el desarrollo de sus competencias intelectuales, los resultados en el rendimiento académico serán realmente satisfactorios, cumpliendo los objetivos de aprendizaje inicialmente planteados por el profesor.

En virtud de los argumentos mencionados, los estudiantes suelen comprender de mejor manera los aprendizajes de geometría u otros conceptos matemáticos generales, cuando son estimulados apropiadamente mediante estrategias novedosas en el aula y con contenidos contextualizados que cuenten con vinculación hacia lo práctico, lo que viabiliza un mayor empoderamiento del conocimiento técnico de estas ciencias. En el marco del enfoque educativo basado en competencias implementado por el MEN, se establece la necesidad de fomentar el desarrollo pleno de las potencialidades y destrezas de los estudiantes respecto a la competencia

matemática, como valor fundamental para la vida. De tal forma, la combinación del origami como técnica didáctica dota a la clase de geometría es un aspecto lúdico, que complementa la enseñanza sobre los tecnicismos relativos a la congruencia y semejanza que configuran las formas bidimensionales y tridimensionales que el alumno debe conocer, al mismo tiempo que permite atender sus necesidades mediante el uso de recursos complementarios para el docente en aras de mejorar los resultados de aprendizaje (Morales, 2019).

Alrededor de este énfasis gravitan ciertos componentes a tener en consideración para establecer reformas de innovación educativa en la asignatura de matemáticas. Por un lado, se amerita que los paradigmas y estilos de enseñanza aplicados por el docente se ajusten a las nuevas necesidades del alumno y, por otra parte, para responder ante la congruencia educativa que se espera, se deben incorporar herramientas y estrategias que impongan desafíos a los jóvenes.

Al hacer revisión acerca de cómo se concibe la problemática en torno a las dificultades de aprendizaje de la geometría, se tiene que aún persiste la percepción de estos contenidos como complejos y poco prácticos, sumado a la carencia de estrategias novedosas que se observan dentro del contexto señalado en esta investigación, producto de los convencionalismos a los cuales se han apegado los docentes de matemáticas. Al respecto, la evidencia empírica que se presenta en contraposición a dicha situación muestra que, a nivel mundial, la cantidad de profesores que están buscando incorporar nuevas metodologías activas en sus aulas va en aumento, lo que actualmente se ha manifestado como una necesidad por fortalecer los estímulos que recibe el alumnado en clases de geometría, considerada como uno de los contenidos en matemática donde se verifican frecuentemente las dificultades de aprendizaje (Dias et al., 2019).

En torno a esto, son diversos los estudios e investigaciones que han puesto de manifiesto la efectividad de utilizar el origami en el contexto educativo y propiamente para el estudio de conceptos en matemáticas (polígonos, segmentos, ángulos, propiedades de las figuras, entre

otros aspectos), que admite un marco práctico e interesante para el estudiante de geometría, donde sea capaz de desarrollar y demostrar actitudes para la construcción de figuras geométricas, así como la comprensión de poliedros, funciones de representación algebraica y gráfica y la habilidad para resolver cuestiones abstractas basadas en la visualización o justificación intelectual (Amaya & Gulfo, 2009).

En sustento de estos postulados, los estudios de Royo (2002) ponen en evidencia el atractivo instruccional que tiene el origami para mejorar la comprensión de los conceptos geométricos considerados en los procedimientos para la confección de figuras, ya que los alumnos logran potenciar su motricidad fina y gruesa, desarrollan procesos cognitivos relacionados con el razonamiento lógico, se manejan habilidades lúdico-pedagógicas en el centro escolar y se mejoran los valores o comportamientos del alumnado cuando se integran habilidades manipulativas en áreas como la geometría.

Asimismo, las experiencias acontecidas a nivel local permiten aseverar el valor del origami y la adopción de metodologías activas dentro de la enseñanza de geometría, ya que, como lo señala Benítez (2007) a partir de sus trabajos de aula realizados con grupos de la Escuela Normal Superior de Pasca en 2004, explorar la geometría mediante el origami constituye una estrategia de alto potencial pedagógico al favorecer ambientes repletos de creatividad y dinamismo en los cuales el alumnado se sienta motivado hacia el aprendizaje de las matemáticas, a la vez que demuestra habilidades artísticas, manifiesta su capacidad de innovación al emplear su imaginación para recrear modelos y fortalece su pensamiento geométrico y métrico.

Dentro del ámbito latinoamericano, se han pronunciado diferentes iniciativas para reformar la práctica docente en el campo de la geometría, un ejemplo de ello lo conforma el trabajo desarrollado por Gallardo y Vergel (2004) quienes emprendieron un proyecto de capacitación dirigido a 60 docentes pertenecientes a diversos establecimientos educativos de nivel básico y medio, tanto en el sector público como privado, localizados en el área metropolitana de la ciudad

de Cúcuta, en el que se promovía la didáctica de la geometría desde la integración del origami para la práctica de la construcción geométrica, aunado con el uso de aplicaciones de software orientadas al aprendizaje de nociones en geometría, a fin de forjar en el alumnado un pensamiento matemático asentado en dimensiones mentales que estén estrechamente enlazados con la acción, para la consolidación de conocimientos desde procesos lógicos y un modelo de aprendizaje menos algorítmico, por el contrario, siendo más heurístico y placentero para el estudiante, quien debe sentirse libre de examinar y verificar sus propios modelos de pensamiento para el alcance de aprendizajes significativos en esta disciplina.

Otra experiencia de aula en la que se trabaja el origami en la didáctica de la geometría, es el caso de Amaya y Gulfo (2010), los cuales introducen la enseñanza de funciones cuadráticas con estudiantes de la etapa media. Los autores definen que, mediante las estrategias de plegado de papel se consuma la iniciación del estudiante al cálculo geométrico, porque se estimula al alumno a armar y desarmar módulos cuadrados para luego analizar las cicatrices restantes de los pliegues, que permiten aproximar las propiedades de cada poliedro estudiado, así como abordar el estudio de conceptos clave (rectas, paralelas, perpendiculares, bisectriz, área lateral, familias de funciones); lo que concede un tránsito por los sistemas semióticos de representación que aportan un significado y sentido concreto de los conceptos que el estudiante es capaz de manipular.

En orden similar, se ha promovido esta tendencia del origami en la enseñanza de geometría hacia maestros autónomos, que se han interesado por trabajar la geometría desde un enfoque didáctico menos convencional, exponiendo que la geometría origámica resulta sobresaliente al considerar las particularidades del estudiante y las características de cada contexto de aplicación, en el que se destaca que la preparación de clases implica hacer búsquedas en materiales diversos (físicos y digitales), a la vez de vincular el uso del transportador, vídeos tutoriales, hojas de papel, equipos tecnológicos u otros recursos para la superposición y elaboración de figuras

(Valencia, 2013). Las experiencias expuestas representan evidencia empírica tanto a nivel nacional como internacional, que asienten las ideas en torno a la implementación del origami para el fomento de aprendizajes significativos en el área de geometría por parte de los estudiantes de educación básica.

## **1.2. Pregunta de Investigación**

---

### 1.2.1. Pregunta general

¿Cuáles son los efectos de un programa de origami sobre el pensamiento geométrico de los estudiantes del tercer grado de básica primaria en la Institución Educativa Distrital Alemania Unificada?

### 1.2.2. Preguntas específicas

¿Cómo es el pensamiento geométrico de los estudiantes del tercer grado de básica primaria en la Institución Educativa Distrital Alemania Unificada, de Bogotá, Colombia?

¿Cuál es el diseño de un programa de origami que potencie el pensamiento geométrico de los estudiantes del tercer grado de básica primaria en la Institución Educativa Distrital Alemania Unificada, de Bogotá, Colombia?

¿Cuáles son las diferencias entre el pensamiento geométrico de los estudiantes del tercer grado que interactuaron con el programa de origami y los estudiantes que no lo hicieron, en la Institución Educativa Distrital Alemania Unificada, de Bogotá, Colombia?

## **1.3. Justificación**

---

A continuación, se desarrollan los argumentos que justifican la realización del presente trabajo, considerando la conveniencia que implica su desarrollo en el plano de la educación formal en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los contenidos geométricos, además de la relevancia social que aporta, sus implicaciones prácticas, utilidad metodológica de la

investigación y sus aportes teóricos hacia el ámbito de la investigación científica en la didáctica de las matemáticas.

### 1.3.1. Conveniencia

Los ambientes formativos de la geometría involucran el tratamiento de objetos teóricos, que también conjugan representaciones gráficas que imponen un marco de referencia relevante para el desarrollo de la visualización en el estudiante, donde una enseñanza situada, que provea cobertura al perfeccionamiento de la percepción y sentido estético en el aula de geometría, llega a ser determinante para potenciar el aprendizaje de conceptos geométricos (Dal Maso, 2007), por lo que en esta investigación se analizó el impacto del uso fundamental del papel, cuyo contenido incorporó las técnicas artísticas del origami para el desarrollo del pensamiento geométrico del estudiante.

En todo momento, en las aulas de las instituciones nacionales se enseña la asignatura de geometría inmersa en las competencias matemáticas de los niños, ya que es un campo de vital importancia en el desarrollo de la vida cotidiana del ser, es ineludible que este campo permea al ser humano en lo académico, personal y social, por ello se incluye como parte del currículo escolar de la Educación Básica Primaria. En Colombia se adoptan diferentes tipos de programas desde el MEN (2004) que promueven el fortalecimiento de competencias matemáticas en algunos centros de enseñanzas del territorio nacional (en especial los que presentan resultados no esperados en pruebas nacionales).

Esta investigación se ajusta a la importancia de desarrollar competencias geométricas, además de brindarle al estudiante la posibilidad de divertirse mientras manipula objetos y aprende. Particularmente, en la IEDAU se vienen adelantando programas de refuerzo institucional para aquellos estudiantes cuyo nivel de aprendizaje no va acorde con el grado que cursan, como una vía para motivar y robustecer las competencias académicas esperadas por

esta población, esto es dado a que la modalidad de trabajo (trabajo por proyecto) no es suficiente para el fortalecimiento de estas competencias.

### 1.3.2. Relevancia social

El estudio acerca de la enseñanza de la geometría, centrada en la innovación docente y en el dinamismo de la lúdica pedagógica a través de la papiroflexia, arrojó resultados que pueden esbozar diversas estrategias y actividades que permiten al profesorado de matemáticas identificar una estructura concreta sobre dichas variables y sus implicaciones en el aprendizaje del estudiante; donde las funciones del docente giren en torno al fomento de las potencialidades intelectuales para la aplicación de nociones geométricas y/o espaciales, así como el fortalecimiento de valores tradicionales en el alumno.

En este sentido, existe una necesidad de que el docente reconozca y asuma que es él quien tiene la responsabilidad de mediar los aprendizajes de forma adecuada, a través de los recursos y actividades artísticas y de creación mediante papiroflexia dentro del área de trabajo y sus posibilidades, siendo visto no solo como una corriente artística, sino como recurso formativo eficiente por medio del cual se brinde ayuda al estudiante para conseguir un aprendizaje significativo de manera interdisciplinaria, enfatizando en las habilidades de cada aprendiz.

Los beneficios que aporta este trabajo a nivel social, se inclinan hacia justificar el potencial funcional del origami en una asignatura práctica como matemáticas, sumado con la compenetración de estrategias de entretenimiento que le permitan al estudiante explorar modos reales de aprendizaje, alejados significativamente de aquellos propuestos dentro de una clase magistral, tradicionalista, donde se sigue un libro modelo y se llega a tener un cúmulo de prácticas repetitivas, que en muchas ocasiones no atraen el interés del estudiante sino que lo distraen, cerrando su posibilidad de descubrir nuevos conocimientos para su desempeño cotidiano, reduciendo sus habilidades para manejar con mayor reflexión las problemáticas del día a día.

Es por ello que esta investigación es importante en la IEDAU, porque aun cuando se dispone de recursos aptos para el trabajo, la aplicación didáctica del origami se mantiene en desconocimiento dentro del centro escolar, especialmente en el campo de la geometría. Desde esto, se tuvo entonces como propósito iniciar un trabajo que permitió proponer un programa dirigido a estudiantes del grado tercero en el área de matemáticas, usando apropiadamente ciertos patrones de papiroflexia dentro de su proceso formativo, para consecuentemente establecer comparaciones entre los hallazgos sobre aquellas áreas en las que se sigue un trabajo de aula tradicional. Esto permitió que el estudiante del grado tercero explorara caminos de aprendizaje a través de los medios creativos, a la par que se exige al docente una apropiación de estas técnicas artísticas para orientar a sus grupos en la obtención de saberes que permitan un mejor nivel académico, así como el dominio de conocimiento respecto al origami en pro de la incursión de estrategias metodológicas diferentes dentro de las prácticas.

### 1.3.3. Implicaciones prácticas

El uso didáctico del origami como herramienta para el desarrollo de competencias y fortalecimiento del pensamiento geométrico, juega un papel importante en la educación, ya que le permite al docente mejorar sus prácticas pedagógicas a través de la implementación de actividades que respaldan los procesos de adquisición de conocimiento en los estudiantes, pasando de ser solamente una estrategia de clase a convertirse en un método del propio del trabajo del docente en diferentes contextos. Se espera entonces que en los resultados de pruebas externas como las Saber y Supérate con el saber, se reflejen resultados positivos, en especial porque además de medir competencias, permiten indicar acciones para mejorar constantemente aquellas dificultades de aprendizajes que se detecten en la acción.

Por tal motivo, se suscitó el interés de abordar una investigación que facilitara la propagación del origami, dando a conocer algunas de sus aplicaciones y beneficios que puede aportar a los estudiantes de educación básica primaria en cuanto a su aprendizaje de las

matemáticas, contribuyendo a la creatividad y la imaginación, mejorando la adquisición de conceptos que se abordan y se desarrollan en las prácticas de aula cotidianas; a su vez obtener un buen desempeño académico y mejora en resultados de pruebas externas, que sea fructífero y que produzca resultados que le aporten a las prácticas de quienes tienen la responsabilidad de formar los hombres y mujeres talentosos que requiere la sociedad actual.

De esta manera se propuso que los estudiantes empiecen a incrementar su motivación por el área de matemáticas en especial dentro de la rama de geometría, donde jueguen con el saber mientras lo aprenden, lo adapten a sus nociones y hagan de él algo productivo dentro de sus procesos de aprendizaje de una manera significativa y dinámica que verdaderamente optimice el saber, permitiendo en los niños de tercero desenvolverse mejor en su entorno, de forma activa, crítica y analítica, permitiendo que las competencias básicas dispuestas por el MEN se alcancen, posibilitando una educación con calidad y pertinencia social.

#### 1.3.4. Utilidad metodológica

Esta investigación científica aporta un compendio de informaciones útiles a nivel teórico y metodológico en el campo de la educación, ya que se sustenta en la idea de continuar estableciendo reformas y apoyar los modelos formativos emergentes en la actualidad, que orientan un cambio progresivo en la forma de enseñar y aprender contenidos en matemáticas, más aún en la etapa de educación básica. Se pretendió mejorar de forma significativa los procesos que se desarrollan en el aula para alcanzar competencias acordes al grado tercero en estudiantes atendidos, desarrollando un proceso instruccional con parámetros importantes para conducir el conocimiento sobre geometría en la educación formal, misma que está determinada por lineamientos y planes que estipulan los logros a alcanzar en un determinado período. Sin embargo, hay que apostar por una educación con calidad en todo el sentido de la palabra, que acometa no solo el cumplimiento de objetivos temáticos, sino también de metas en cuanto a

aprendizajes significativos que perduren en el estudiante, sirvan para la solución de dilemas de vida y que motiven su interés por indagar más sobre los contenidos de la clase (MEN, 2004).

#### 1.3.5. Utilidad teórica

Los estudiantes tienen el derecho fundamental de acceder a escenarios de educación innovadores, y a recibir formación contextualizada y dinámica frente a ciertas áreas del currículo que se han percibido generalmente como complejas. Se debe procurar el diseño instruccional con integración de herramientas versátiles en el aula de matemáticas, para acompañar aquellos contenidos en los que la intervención deba contar con practicidad, tal es el caso de la geometría, donde se busca estimular el aprendizaje por este campo, para que el estudiante se apropie de conceptos sobre planos y sólidos a través de técnicas entretenidas, como el origami, para la manipulación, conceptualización y explicación de elementos presentes en la geometría.

En esta investigación se consideró pertinente desarrollar métodos prácticos para el aprendizaje del área de geometría en el campo educativo, dado que se utilizaron estrategias de intervención encaminadas hacia la comprensión de conceptos y resolución de problemas de índole perceptiva, además de integrar herramientas manipulativas mediante técnicas de un arte visual como el origami y su asociación con el contenido curricular en la asignatura. También se observaron beneficios académicos a nivel social, teórico y metodológico, dado que con la implementación de estas estrategias se generó y fortaleció un nuevo conocimiento, además, se tuvo una nueva estrategia para las prácticas de aula.

Entre los elementos y estrategias considerados en este trabajo se destaca el uso de material especial de papiroflexia para la resolución de problemas geométricos concernientes a distintos sólidos, y el fortalecimiento de competencias geométricas a través del origami, de esta forma, se relaciona la investigación con las prioridades observadas a nivel regional y nacional, marcadas por la apremiante necesidad de ajustar las metodologías para la enseñanza de matemáticas y geometría en la educación formal.

#### 1.4. Hipótesis

---

H0: El programa basado en origami no fortalece el pensamiento geométrico de los estudiantes de tercer grado de la Institución Educativa Distrital Alemania Unificada.

Hi: El programa basado en origami fortalece el pensamiento geométrico de los estudiantes de tercer grado de la Institución Educativa Distrital Alemania Unificada.

A modo de conclusión, la educación matemática se concibe como una herramienta fundamental para elevar el nivel intelectual de los individuos, y su intervención en educación básica resulta determinante para el desarrollo de competencias integrales en el alumnado; por tal razón, esta investigación buscó establecer ciertos criterios que contribuyen al fortalecimiento de los mecanismos empleados para la enseñanza de la geometría del tercer grado de esta etapa escolar, teniendo en cuenta las necesidades de apoyo a las dificultades que experimenta el estudiante para el aprendizaje de las matemáticas, y la motivación hacia los docentes para renovar la práctica en el campo, todo ello enmarcado desde los lineamientos curriculares emanados por el MEN.

## **CAPÍTULO II MARCO TEÓRICO**

En este capítulo se abordan fundamentos, premisas y postulados teóricos en los que se apoya la investigación, desde un análisis conceptual de las variables. Se parte desde la selección y descripción de los constructos de la teoría subyacente al estudio. Continúa con el análisis conceptual sobre pensamiento geométrico, que incluye su definición, los niveles de esta forma de pensamiento, habilidades inherentes, aspectos descriptivos sobre la didáctica de la geometría y etapas del proceso de enseñanza de esta disciplina. Además, se plantea la conceptualización del origami como arte antiguo y sus implicaciones en los procesos educativos para la enseñanza de contenidos geométricos. Seguidamente, se exponen ciertos estudios empíricos que sirven como antecedentes del presente estudio, y finaliza con la exposición del marco jurídico legal que le da soporte en este sentido.

## **2.1 Teoría educativa que sustenta el estudio**

---

Esta investigación se sustentó en los principios propuestos por el constructivismo como teoría educativa. Al respecto, el constructivismo como enfoque psicológico del aprendizaje, destaca que el aprendiz tiene un papel activo y preponderante en la construcción de su conocimiento, como producto de la comprensión de la información, a la que le ha dado significado, desde su motivación, sus intereses y necesidades (Carretero, 2021). Por tanto, este enfoque se orienta más hacia los procesos de aprendizaje desarrollados en entornos significativos, controlados por los mismos estudiantes, que en los resultados de aprendizaje o el logro de los objetivos propuestos (Woolfolk, 2010), en los que el docente procura a los estudiantes estrategias de aprendizaje interactivas y dinámicas que despierten su curiosidad por la investigación (Tigse, 2019).

Al respecto, Carretero (2021) afirma que el postulado central de constructivismo es que la persona no es solamente un producto del ambiente o la expresión de sus disposiciones emocionales y afectivas, sino que, como consecuencia de la interacción de estos dos factores,

se va construyendo a sí misma, por ello influyen en su desarrollo los esquemas que va construyendo mediante su interacción con el medio ambiente del contexto donde se encuentra inmersa.

Desde el punto de vista del constructivismo, el aprendizaje se entiende como una construcción colaborativa de conocimientos en la que intervienen los valores, por lo que la finalidad de la enseñanza es desafiar el conocimiento de los estudiantes para alcanzar una comprensión profunda del contenido abordado, por lo tanto, desde esta perspectiva, el papel del docente es el de facilitador, guía y coparticipante en el aprendizaje (Woolfolk, 2010).

Por su parte, Bolaño (2020) afirma que, en el contexto del aprendizaje de las matemáticas, el conocimiento se fundamenta en la comprensión y resolución de problemas, por lo tanto, no requiere de habilidades especiales para la práctica educativa, sino comprometerse a crear el andamiaje requerido para dicho aprendizaje, como dinamizar los procesos educativos en el aula, proveer a los estudiantes de las herramientas que lo conduzcan al aprendizaje, motivarlo, servir de ejemplo y estímulo; demostrando la utilidad de las matemáticas como elemento desarrollador del pensamiento que facilita la comprensión del mundo que les rodea y la solución de problemas de la vida cotidiana.

## **2.2 Análisis conceptual del pensamiento geométrico**

---

### 2.2.1 Conceptualizaciones sobre el pensamiento geométrico

Dado que el significado etimológico del término “geometría” alude a la combinación de las palabras *geo* (tierra) y *metria* (medida), la geometría consiste en una ciencia aplicada para establecer medidas sobre la tierra, la cual, desde la antigüedad ha sido estudiada y ampliada por eruditos en el campo como Euclides (300 a.C.) o Pitágoras (475 a.C.), a fin de compendiar diversos elementos geométricos definidos o no, con postulados y axiomas a partir de los cuales se producen teoremas mediante determinadas reglas lógicas (Polanía & Sánchez, 2007).

En este sentido, la geometría como disciplina inherente a las ciencias matemáticas, amerita la ejecución de funciones cognitivas y operaciones mentales específicas para el entendimiento de nociones lineales, espaciales y vectoriales, que pueden seguirse a través de protocolos que hagan énfasis en los procesos de pensamiento humano. Por lo tanto, se habla del pensamiento geométrico como uno de los componentes fundamentales para la comprensión y desarrollo de las matemáticas (Sáenz et al., 2017).

A continuación, se presentan diferentes perspectivas en torno al concepto de pensamiento geométrico, desde la revisión de definiciones clásicas, hasta la derivación de conceptos recientes. Al respecto, Jungk (1979) conceptualiza el pensamiento geométrico como una forma de pensar a la que acceden los humanos ante situaciones que requieren conocimientos, habilidades y capacidades geométricas, como apoyo al pensamiento general. Desde la mirada de Proenza (2002) se concibe como una forma de pensamiento matemático basado en el conocimiento de modelos sobre el espacio físico tridimensional, es decir, señala que este pensamiento dota al individuo con la capacidad de estudiar un plano y espacio a través de conceptos y leyes relacionados con dichas variables, para así generar razonamientos acordes con la realidad visualizada.

A su vez, las aproximaciones de Polanía y Sánchez (2007) identifican al pensamiento geométrico como un proceso cognitivo cuyo objetivo es el estudio consciente de términos primitivos tales como: definir o caracterizar variables, comparar elementos, formular conjeturas en torno a algo, determinar si una definición está bien formulada, aplicar lógica, establecer relaciones y congruencias, asimilar teorías de conjuntos, así como aplicar nociones aritméticas.

Posteriormente, Proenza y Leyva (2008) afirman que el pensamiento geométrico es un estilo de pensamiento matemático con una fuerte base senso-perceptual, que comienza a partir de las primeras interacciones del individuo con su medio directo, para luego ampliar el

entendimiento de contenidos geométricos mediante procesos mentales complejos que permiten desarrollar la capacidad de visión, representación e imaginación espacial.

Por su parte, desde una perspectiva actual, el concepto de pensamiento geométrico se ha expandido y no se limita al reconocimiento visual y nominal de determinadas formas, sino que alude a la capacidad de explorar el espacio, comparar y relacionar elementos observados, expresar verbalmente las acciones realizadas, descubrir propiedades en las figuras y/o transformaciones desde la observación, construir modelos, elaborar conclusiones, formular leyes generales y resolver problemas; todo ello sobre la base de interiorizar el conocimiento de elementos asociados con la geometría (Nunda et al., 2017).

Asimismo, Camacho y Yubrán (2020) conciben el pensamiento geométrico como un proceso mental fundamental para el desarrollo integral de las personas, ya que concede el establecimiento de relaciones espaciales conformes con el medio, a la vez que se promueve la racionalidad individual, derivada desde la interacción del sujeto con el mundo externo, en aras de mejorar el desempeño de diversas actividades cotidianas.

Básicamente, cuando una persona aplica pensamiento geométrico ejecuta acciones para buscar patrones o relaciones, transformaciones, así como analizar figuras en el plano y/o espacio, para apuntar hacia el desarrollo del pensamiento visual, a la demostración del conocimiento exacto y universal necesario, por medio de encadenamientos lógicos de proposiciones (Vásquez & Cortínez, 2021). Como se ha visto, el pensamiento geométrico es un estilo de pensamiento al cual recurren los individuos cuando necesitan establecer relaciones entre objetos del entorno, ya que es útil para hacer estimaciones, cálculo espacial, medición de magnitudes y cantidades.

### 2.2.2 Niveles del pensamiento geométrico

Dentro del pensamiento geométrico se concentra una serie de niveles que hacen referencia a la comprensión o aprendizaje general sobre aritmética y geometría, cuya utilidad consiste en establecer un diagnóstico real acerca del dominio de conceptos y procedimientos geométricos

por parte del aprendiz; estos niveles igualmente se asocian con el pensamiento matemático y responden al grado de desarrollo físico-mental en el que se encuentren las personas (Jungk, 1979).

En este orden, Van Hiele (1999) propone 5 niveles de desarrollo del pensamiento geométrico que permiten estructurar la forma en la que los individuos consiguen un aprendizaje significativo sobre nociones geométricas, los cuales se muestran en la Tabla 1.

**Tabla 1**

*Niveles del pensamiento geométrico*

<b>N°</b>	<b>Nivel</b>	<b>Descripción</b>	<b>Habilidades asociadas</b>
<b>1</b>	Reconocimiento (visualización)	Corresponde con las acciones inicialmente ejecutadas por el estudiante al percibir figuras geométricas de manera global, ignorando sus propiedades y/o características. En este punto, el aprendiz no identifica las partes componentes en un sistema geométrico, se limita a enfatizar aspectos sobre la posición de la figura en el plano.	-Identificar apariencias. -Observaciones elementales.
<b>2</b>	Análisis	El estudiante toma conciencia respecto a la formación de las figuras geométricas, es decir, reconoce sus partes y consideran que están dotadas de propiedades matemáticas. En este punto, descubre experimentalmente relaciones entre componentes de una figura, reconoce características relevantes, identifica la posición de las figuras como un atributo poco relevante, desconoce que una figura puede pertenecer a varias clases y atender a nombres distintos, no establece relaciones desde deducciones lógicas, ni es capaz aún de hacer demostraciones formales.	-Expresar en un dibujo la información verbal. -Utilizar las propiedades dadas de una figura para dibujarla o construirla. -Reconocer propiedades geométricas de diferentes objetos físicos.
<b>3</b>	Relaciones, clasificación u ordenamiento (abstracción)	El estudiante empieza a desarrollar habilidades de razonamiento matemático y comienza a plantear deducciones, lo que alude a la capacidad de entender significados	-Reconocer interrelaciones entre diferentes tipos de figuras.

N°	Nivel	Descripción	Habilidades asociadas
		sobre las definiciones dadas. Es capaz de establecer relaciones lógicas y seguir razonamientos sencillos, no obstante, aún no comprende el funcionamiento de sistemas axiomáticos en el proceso de validación del conocimiento geométrico.	-Reconocer propiedades comunes de diferentes tipos de figura. -Definir con palabras adecuadas y consistentes. -Formular frases que muestren relaciones entre figuras.
4	Deducción formal	El estudiante está en la capacidad de realizar razonamientos lógicos concretos desde la formalidad de los conceptos, por lo tanto, comprende el significado de los axiomas, toma sentido las demostraciones a través de pasos secuenciales y valora dichos estudios como métodos efectivos para constatar la veracidad de ciertas afirmaciones. En este nivel, se llevan a cabo deducciones y demostraciones sobre los teoremas.	-Utilizar información de otra figura para deducir más información. -Comprender las distinciones entre definiciones, postulados y teoremas. -Reconocer cómo y cuándo usar elementos auxiliares en una figura. -Deducir a partir de la información dada cómo dibujar una figura específica.
5	Rigor lógico	El estudiante llega a ser capaz de trabajar desde diferentes sistemas axiomáticos para desarrollar actividades matemáticas, ya que, en este nivel, el estudio de la geometría es altamente abstracto, lo que concede que el aprendiz establezca teoremas en sistemas axiomáticos y proceder con un análisis minucioso de estos eventos.	-Utilizar reglas de la lógica para desarrollar demostraciones. -Deducir consecuencias a partir de información. -Deducir propiedades de los objetos geométricos a partir de información. -Resolver problemas que establezcan relaciones entre objetos físicos y geométricos.

*Nota:* elaboración propia a partir de Iglesias y Ortiz (2015); Alfonso (2004).

Cabe destacar que estos niveles cuentan con cinco propiedades definidas (Barrera & Reyes, 2015) que inician con una *secuencia fija*, donde el estudiante no puede estar en el nivel  $n$ , si no ha pasado por el nivel  $n-1$ ; *adyacencia* en cada nivel (lo que era intrínseco en el nivel previo, se vuelve extrínseco en el actual); *distinción*, cada nivel maneja símbolos lingüísticos y red de relaciones particulares que conectan sus símbolos; *separación*, para considerar que dos personas que razonan en niveles distintos pueden entenderse con dificultad; y finalmente, *logro*,

cuando se alcanza un nivel elevado de aprendizaje, que totaliza un entendimiento completo de nociones geométricas objeto de estudio.

A saber, cada uno de los niveles de pensamiento geométrico tiene que ver con las diferencias en los objetos de pensamiento que constituyen el foco de atención del aprendiz. Por ejemplo, indican Fuys et al. (1988, como se citó en Barrera & Reyes, 2015), que en el nivel 1 los objetos de pensamiento son únicamente figuras geométricas; por su parte, el estado del nivel 2 permite al estudiante operar sobre clases de figuras y estudiar sus propiedades, para consecutivamente llegar al nivel 3, donde el estudiante hace ordenamientos lógicos sobre las mismas propiedades vistas; mientras tanto, en el nivel 4 las relaciones ordenadas representan los objetos derivados por el aprendiz para finalmente, llegar a los fundamentos de esas relaciones de ordenamiento en el último nivel de rigor.

Adicionalmente, las aportaciones de Van Hiele (1999) indican que estas fases son por naturaleza progresivas y jerarquizadas entre sí, lo que quiere decir que no es posible alcanzar un determinado nivel, si todavía no se han completado las competencias de razonamiento respectivas del nivel previo, por ende, el aprendizaje de la geometría amerita que el estudiante transite por cada nivel ordenadamente, a fin de efectuar conexiones entre el conocimiento previo y la información nueva que se presenta en el nivel sucesivo (Barrera & Reyes, 2015).

Además, los mencionados niveles se vinculan directamente con una concepción formativa del proceso de aprendizaje de contenidos geométrico, por ello, Duval (1995) establece que el pensamiento geométrico implica un proceso cognitivo compuesto por esta secuencia de niveles, en cada uno de los cuales el estudiante trabaja diferentes aprehensiones para una figura geométrica: perceptual, secuencial, discursiva y operativa; donde cada tipo consta de leyes específicas de organización y procesamiento de estímulos visuales. En relación con estos planteamientos, Sinclair y Moss (2012) reflexionan que el pensamiento geométrico establece una

forma de comunicación en la que dichos niveles se transforman en un discurso geométrico propio de cada estudiante.

Paralelamente, las ideas de Gagatsis (2021) permiten distinguir que el proceso de aprendizaje de la geometría se compone por diferentes modos de aprehensión del conocimiento técnico; por cuanto, se destaca un modo de aprehensión perceptual (reconocimiento y nombramiento de figuras geométricas, en posiciones varias); la aprehensión secuencial (para construir cifras o describir su construcción); la aprehensión discursiva, que indica el hecho de que las propiedades matemáticas representadas en un dibujo no se determinan mediante una aprehensión perceptual, sino que debe permanecer en control de las declaraciones (denominación, definición, comandos primitivos); así como la aprehensión operativa (visión de solución sobre un problema cuando se observa una figura concreta).

Por todo lo antes expuesto, se sintetiza que, dentro del contexto educativo de la geometría, es necesario que el profesorado se dedique a determinar cuáles son los procesos cognitivos y tipos de aprehensión aplicados por los estudiantes durante las tareas geométricas asignadas, con la finalidad de evaluar si se está conduciendo al estudio efectivo de las figuras y el espacio para el desarrollo del pensamiento geométrico en los estudiantes.

### 2.2.3 Didáctica de la geometría para el desarrollo del pensamiento geométrico

Resulta claro identificar que los procesos de enseñanza en el campo de las matemáticas persiguen como principal fin que los estudiantes aprendan a pensar por sí mismos y con carácter crítico, de tal forma que se sientan empoderados con los conocimientos técnicos para resolver situaciones en su entorno, ser curiosos y mantenerse críticos ante los fenómenos externos, de tal manera que el estudiante adquiera competencias esenciales para desenvolverse con pericia en su medio de interacción y ofrezca aportaciones de valor social.

Dicho esto, las tendencias que en general se perciben dentro de la dinámica escolar actual de las instituciones dedicadas a la enseñanza primaria y secundaria, se han enfocado en el

fortalecimiento del pensamiento matemático estudiantil, a partir del trabajo directo sobre las habilidades y conocimientos, tanto aritméticos como numéricos, a los que se somete el estudiante en las prácticas de clase. En efecto, tradicionalmente la didáctica de la geometría ha planteado algoritmos para la resolución de las cuatro operaciones básicas (adición, sustracción, multiplicación y división), además de apoyar la memorización de procedimientos mecánicos para resolver ejercicios, así como aplicar fórmulas para hallar perímetros, áreas o propiedades de diferentes polígonos; lo que ha conllevado a que la esencia del pensamiento geométrico pase a otro plano dentro del proceso de enseñanza (Nunda et al., 2017).

Es por ello que, la mediación de aprendizajes y contenidos geométricos debe hacer énfasis en las metodologías implementadas, en el diseño de contenidos curriculares y, propiamente, en el conocimiento profesional que posea el profesorado de matemáticas y geometría en los centros escolares. En cuanto a este último factor, cabe destacar que el conocimiento del profesor debe involucrar competencias didácticas que deriven un enfoque lógico-semiótico con el que el docente pueda seleccionar criterios fundamentados en los niveles de pensamiento geométrico propuestos por Van Hiele (1986; 1999), y de esta forma desarrollar programas académicos efectivos para la instrucción de la geometría (Alfonso, 2004).

De esta manera, los docentes deben atender tanto a la forma que tienen los estudiantes para aplicar estrategias de resolución de problemas, como a la forma de expresión y manejo de significados en este campo del saber, por lo tanto, es responsabilidad del profesorado revisar la manera en la que los grupos expresan sus conocimientos, y así poder determinar en qué nivel de razonamiento se encuentra un estudiante (Gamboa & Vargas, 2013).

En general, la importancia de aplicar metodologías didácticas para la enseñanza de geometría reside en la posibilidad de apoyar los procesos de desarrollo cognitivo del estudiante, concretamente, para fortalecer sus habilidades para la visualización, exploración, representación y descripción sobre los objetos del entorno; desde los cuales se promueva la comprensión

profunda de conocimientos útiles para la vida cotidiana (Sáenz et al., 2017), con especial interés en la creación de espacios formativos donde el estudiante adquiriera aprendizajes significativos desde la creatividad.

Por su parte, la enseñanza de contenidos geométricos y nociones matemáticas en general, debe procurar que los temas tratados en el aula sean minuciosamente seleccionados, a fin de corresponder con las necesidades e intereses reales de los estudiantes, en este sentido, se precisa la activación de tareas dirigidas a que el estudiante aporte soluciones a diferentes ejercicios propuestos (Nunda et al., 2017), fortaleciendo sus propias competencias para la toma de decisiones y atención a los problemas reales.

La didáctica de la geometría como mecanismo de apoyo al desarrollo del pensamiento geométrico implica resolver ejercicios, problemas de cálculo y demostración en la geometría del espacio; debido a las insuficiencias que se presentan para identificar las propiedades de las figuras planas y espaciales presentes en las condiciones de estas, para identificar relaciones entre las propiedades de estas figuras, para deducir consecuencias de los datos y para esbozar una figura geométrica que les permita comprender mejor las condiciones y exigencias del ejercicio o problema (Ortiz et al., 2018).

A grandes rasgos, los métodos aplicados para la enseñanza y aprendizaje de la geometría siguen siendo hoy en día tradicionalistas, basados en la utilización de recursos convencionales como el lápiz, papel y pizarra, además, la tendencia docente se mantiene en la idea de transmitir conocimientos al estudiante para que éste llegue a la solución de un ejercicio, no prestando suficiente atención al desarrollo de habilidades relacionadas con la vista, representación e imaginación espacial del estudiante, que se instauran como elementos clave para el desarrollo del pensamiento geométrico.

## 2.2.4 Etapas del proceso de enseñanza del pensamiento geométrico

El proceso de mediación de aprendizajes en geometría está compuesto por fases o etapas específicas, en las cuales los estudiantes transitan desde una escasa inmersión hacia los conceptos, hasta la aplicación de razonamientos rigurosos locales (Zambrano, 2006, como se citó en Barrera & Reyes, 2015), que dependen de cada concepto o idea sobre figuras, formas, planos, posiciones y espacio geométrico. Cabe resaltar que el nivel de razonamiento es local, esto significa que se posee un nivel de razonamiento por cada concepto o idea geométrica.

En este orden, se abarcan dos momentos fundamentales en la enseñanza de geometría: una etapa senso-perceptual, es decir, el momento base donde el estudiante se limita a ser un observador de los objetos, percibiendo formas con una reducida atención hacia las propiedades constitutivas de los mismos; y una etapa de interiorización de las propiedades geométricas inicialmente observadas, donde se admite el desarrollo de conocimientos geométricos y la asimilación de aprendizajes sólidos respecto a este campo (Nunda et al., 2017).

Desde una perspectiva similar, Barrera y Reyes (2015) conciben el proceso de enseñanza de la geometría en cinco fases sucesivas en las que se busca que el profesor diseñe actividades, estrategias y escenarios de formación para que el estudiante desarrolle su pensamiento geométrico en concordancia con los niveles establecidos. En este orden, dichas etapas se describen en la Tabla 2.

**Tabla 2**

*Etapas del proceso de enseñanza del pensamiento geométrico*

Nº	Etapas	Descripción	Preguntas / estrategias
1	Información o indagación	En esta fase el estudiante se familiariza con el dominio de trabajo, al mismo tiempo que se involucra con el profesor y sus compañeros en discusiones	Algunas preguntas que puede formular el profesor: ¿qué es un paralelogramo? ¿Qué es un cuadrado? ¿Qué es un rectángulo? ¿Qué tienen en común las figuras

Nº	Etapas	Descripción	Preguntas / estrategias
		acerca de los objetos de interés. Se realizan observaciones, preguntas y se introduce vocabulario específico.	anteriores? ¿En qué son diferentes? ¿Es posible que un rectángulo sea un paralelogramo o que un paralelogramo sea un rectángulo?
2	Orientación guiada	Los estudiantes exploran un tema de estudio a través de actividades propuestas. A través del desarrollo de estas actividades, los estudiantes llevan a cabo procesos del pensamiento matemático.	El profesor formula preguntas con respuesta concreta, también solicita la construcción (bien sea en una cuadrícula o geoplano), un rombo con diagonales iguales, un rombo con diagonales diferentes; rombos con uno, dos, tres y cuatro ángulos rectos; o que construya un cuadrado de área 2.
3	Explicitación o explicación	El estudiante es consciente de las relaciones que existen entre las propiedades de los objetos geométricos, y trata de expresarlas verbalmente o por escrito, mientras aprende el lenguaje técnico.	Los estudiantes expresan e intercambian sus puntos de vista, basados en las experiencias de aprendizaje antes desarrolladas, con el objetivo de construir relaciones entre los temas vistos.
4	Orientación libre	El estudiante aprende mediante la ejecución de tareas con diferentes soluciones o de respuesta abierta. En esta etapa se promueve la construcción de redes complejas de relaciones entre conceptos y procesos matemáticos relevantes.	Las tareas permiten al estudiante explorar, formular conjeturas y justificar relaciones. Por ejemplo, encontrar una fórmula para calcular el área de un polígono construido en el geoplano, con base en el número de puntos en la frontera y en el interior del polígono.
5	Integración	El estudiante resume todo lo que ha aprendido acerca del tema, reflexiona sobre sus propias acciones y adquiere una visión general de la nueva red de relaciones construida durante el trabajo en clases.	La participación del profesor en esta fase consiste en explicitar relaciones o procesos aprendidos por los estudiantes. Se establecen los conocimientos mediante la integración de lo visto.

*Nota:* elaboración propia, basado en Barrera y Reyes (2015).

Estas fases integran el proceso continuado de enseñanza de la geometría para el desarrollo de pensamientos y destrezas asociadas con el área. Cada una de estas etapas conforman los modelos didácticos aplicados en la instrucción de la geometría, a través de los cuales los estudiantes adquieren destrezas para razonar sobre ubicaciones espaciales, nociones acerca del

espacio, ejecutar manipulaciones geométricas, así como estudiar materiales concretos (Proenza & Leyva, 2008).

A partir de esto, se sintetiza que todo proceso alude a un conjunto de fases, y es propiamente cuando se habla de la enseñanza del pensamiento geométrico como una serie de etapas que van desde la percepción hasta la interiorización de contenidos geométricos, para que el estudiante pueda reflexionar sobre lo que observa, por ello, la participación escolar debe garantizar la creación de experiencias efectivas en clases que permitan fortalecer los esquemas mentales del estudiante y así apoyar el desarrollo de su pensamiento geométrico.

#### 2.2.5 Pensamiento geométrico en la competencia matemática

Los objetivos de aprendizaje propuestos en los sistemas educativos deben inclinarse hacia una dimensión amplia del desarrollo de la competencia del estudiante. Para el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN, 1998) una competencia es un conjunto de conocimientos, habilidades, comprensiones, disposiciones cognitivas actitudinales, socioafectivas y psicomotoras del individuo; que deben estar conscientemente relacionadas entre sí, para facilitar un flexible desempeño de diferentes actividades en escenarios desconocidos que impongan retos.

Desde estos postulados, se concibe a la competencia matemática como una habilidad básica para las personas, vista como una serie de destrezas específicas que implican incorporar contenidos numéricos para la resolución de problemas (Tobón, 2013), es decir, que son habilidades y conocimientos derivados de nociones numéricas, desde lo cual se derivan, según el MEN (1988), dos tipos básicos de conocimiento numérico para integrar la competencia matemática, los cuales pueden visualizarse en la Figura 1.

## Figura 1 Tipos de conocimiento numérico implícitos en la competencia matemática

*Tipos de conocimiento numérico implícitos en la competencia matemática*



*Nota:* elaboración propia basada en MEN (1998)

Como puede observarse, estos conocimientos numéricos están estrechamente relacionados entre sí y ambos tipos de conocimientos conducen al desarrollo de la competencia matemática desde una dimensión teórico-práctica. En este caso, el conocimiento conceptual se caracteriza por ser declarativo y por su proximidad hacia la reflexión, se vincula con el saber qué y por qué de las cosas, así como por la asociación de conocimientos previos del estudiante. Mientras tanto, el conocimiento procedimental se asocia con el saber cómo, es decir, alude a la aplicación de técnicas y estrategias para representar conceptos y posteriormente afianzar destrezas para la acción (diseño, comparación, ejecución de algoritmos, producción de mensajes numéricos y realización de cálculos). Estos conocimientos forman parte de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas propuestos por el MEN (1998), donde se proporciona una concepción pragmática e instrumental de los saberes matemáticos para la efectiva utilización de conceptos, sistemas y estructuras matemáticas generales.

## 2.2.6. El pensamiento geométrico en los estándares de competencia de Colombia

Asimismo, dentro del contexto educativo colombiano, se parte desde la necesidad de contribuir con el desarrollo de las competencias matemáticas desde los cinco tipos de pensamiento abordados en el área: pensamiento numérico, espacial y geométrico, métrico, variacional-algebraico-analítico y pensamiento aleatorio (Gómez, 2019). Sin embargo, el desarrollo en competencias en matemáticas amerita que se proporcionen herramientas al estudiante para apropiarse de la información, generando destrezas y hábitos para la futura resolución de situaciones en diversos contextos (Martínez et al., 2020).

Por ello, el sistema educativo de Colombia establece la necesidad de formar individuos competentes, haciendo hincapié en el fortalecimiento de habilidades para el manejo teórico-práctico del conocimiento matemático como aspecto fundamental para la vida, en aras de apoyar el desarrollo del pensamiento lógico-matemático y pensamiento geométrico en los centros educativos (MEN, 2006).

En lo que respecta a los estándares sobre el abordaje de las matemáticas, indica el ICFES (2013) en sus lineamientos para las Pruebas SABER 3°, 5° y 9°, que para el desarrollo formal de las competencias matemáticas desde el entorno escolar, se debe partir de una perspectiva que integre los lineamientos curriculares y estándares básicos de competencias respecto a los conocimientos, procesos y contextos en dicho campo, es decir, que se prioriza la contextualización de situaciones problemáticas asociadas con la utilidad matemática en cualquier esfera de vida y con respecto a otras ciencias. En este orden, se señalan dos vertientes, por un lado, se habla de competencias para hacer alusión a las formas de proceder y, por otro lado, por los componentes, que son aspectos conceptuales y estructurales de las matemáticas.

A tales efectos, según el MEN (2006), la estructuración de las competencias se agrupa de la siguiente manera: (a) razonamiento y argumentación: relacionadas con las rutas a seguir para la consecución de conclusiones, formulación de hipótesis o conjeturas, ejemplificar, reconocer

patrones y expresión matemática frente al planteamiento de interrogantes varias; (b) comunicación, representación y modelación: habilidades estudiantiles para interpretar, expresar ideas, describir relaciones matemáticas, relacionar materiales físicos y diagramas, modelar desde el lenguaje concreto, pictórico, gráfico y algebraico, manipular expresiones con símbolos y fórmulas, usar variables y construir argumentaciones; (c) planteamiento y resolución de problemas: enunciar problemas basados en situaciones internas y externas a las matemáticas, desarrollar y aplicar estrategias, justificar métodos e instrumentos seleccionados para resolver cuestiones, justificar la pertinencia de un cálculo, verificar e interpretar resultados y generalizar soluciones para nuevas situaciones. En estas últimas competencias quedan inmersas la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.

En cuanto a los componentes, indica el ICFES (2013) la presencia de cinco pensamientos descritos en sus lineamientos curriculares y estándares básicos de competencias, los cuales evalúan los siguientes términos: (a) componente numérico-variacional: inclinado por la comprensión de números y sistemas de numeración, significado del número, estructura numérica, operaciones, comprensión de propiedades y dependencia del efecto sobre relaciones entre ellas, identificación de variables, descripción de fenómenos de cambio, proporcionalidad, noción de funciones; (b) componente geométrico-métrico: respectivo a la construcción de representaciones sobre objetos del espacio, las relaciones entre ellos y sus transformaciones, razonamiento geométrico, comprensión del espacio, pensamiento visual, análisis abstracto de figuras en el plano a través de la observación de patrones y regularidades, así como la solución de problemas de medición y estimación de magnitudes; (c) componente aleatorio: reconocimiento, descripción y análisis de eventos aleatorios, aspectos relacionados con la lectura, interpretación y modelado de datos en contexto desde información numérica, análisis cualitativo de regularidades, formulación de inferencias y argumentos a través del empleo de medidas de tendencia central y dispersión.

Por todo lo antes expuesto, de acuerdo con ICFES (2013) los procesos de aprendizaje para las matemáticas han de centrarse en dar significado a los conceptos técnicos y su significativa práctica, de tal manera que se acompañe al estudiante en procesos lógicos a través de los cuales pueda representar, simbolizar, generalizar, organizar, formular o validar información de interés; a fin de fortalecer sus capacidades para establecer descripciones matemáticas, explicaciones y/o construcciones.

## **2.3 Análisis conceptual del origami**

---

### 2.3.1 Definición de origami

Desde hace décadas, se ha considerado como un tema de interés común a las conexiones existentes entre el arte del origami, las matemáticas, la didáctica y el campo de la ciencia (Lang, 2009). El origami es un estilo artístico de origen japonés, también llamado “papiroflexia”, término de origen latino derivado de *papiro* (papel) y *flectere* (doblar), porque básicamente significa doblado de papel; igualmente, el vocablo japonés tuvo la misma composición lingüística y se conforma desde la combinación de las palabras: *ori* (doblar) y *kami* (papel) (Demaine & O'Rourke, 2007), siendo una técnica caracterizada por su precisión al hacer coincidir los bordes del papel durante la confección de figuras simples o complejas (Rodríguez, 2014).

A manera general, el origami está formalizado como disciplina artística y consiste en la creación de patrones en papel (Bern & Hayes, 1996) para la construcción de objetos de papel ensamblados mediante la ejecución de plegaduras. La técnica del origami concentra la manipulación de piezas o trozos de papel cuadrado para la confección de figuras abstractas que sirvan para evocar elementos reales como animales, objetos, formas geométricas, entre otros elementos de interés (Amaya & Gulfo, 2009). El origami es entonces, un arte ancestral para la elaboración de modelos unidimensionales, bidimensionales o tridimensionales que representen objetos determinados que, además, ha sido altamente utilizado en la didáctica básica de las

matemáticas para explicar conceptos sobre segmentos, rectas, ángulos, planos, composición de polígonos y/o poliedros, entre otras aplicaciones en la enseñanza.

### 2.3.2 Orígenes del origami

Las técnicas asociadas con la disciplina artística del origami tuvieron sus orígenes en las antiguas civilizaciones de Japón, donde básicamente inventaron la papiroflexia hace más de mil años. Si bien es cierto que el papel se introdujo inicialmente en China hacia el año 105 d.C. a cargo de Tsai Lun, durante los primeros siglos de la era cristiana, fue trasladado hasta Japón en el siglo VI d.C. y es cuando los japoneses inician la confección de figuras y modelos con papel, que fueron perfeccionando paulatinamente hasta formalizar el origami como arte, dotándolo de principios estéticos que estaban íntimamente relacionados con su cultura (Blanco & Otero, 2005) y cuya sensibilidad hacia la calidad de la estructura y proporción del diseño es fundamental.

Los acontecimientos históricos sucesivos permitieron la introducción del origami en otras culturas globales, cuando en el siglo XIII Marco Polo lleva las ideas de la papiroflexia hasta el continente europeo, para que luego los árabes lo introdujeran en España, desde donde se establece el papel en distintas zonas de América Latina (Palacios, 2013 como se citó en Rodríguez, 2014). Los años posteriores han permitido considerar a la papiroflexia como arte, ciencia y modo de entretenimiento, con un significativo impacto hacia los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, como herramienta de estímulo a la actividad cerebral del estudiante.

### 2.3.3 Clasificación del origami

Entre los métodos aplicados para la creación de modelos en papel, se destaca la identificación de estructuras y la simulación de una amplia cantidad de cuerpos mediante el seguimiento paso a paso de algoritmos específicos para cada elaboración (Bridget et al., 2012). A su vez, el origami tiene como finalidad la creación de múltiples figuras visualmente atractivas

para el espectador, mediante la concreción de ángulos en el doblado del papel (Lang, 2010), sin hacer uso de cortes. En las bases de este arte reside un amplio componente conceptual matemático en cualquiera de sus categorías fundamentales conocidas: origami modular, origami tradicional y origami para el diseño de animales (Yin, 2009). Frente a estas ideas, la clasificación de la papiroflexia tiene lugar desde diversas perspectivas del proceso artístico: según la finalidad, tipo de papel y piezas utilizadas. A continuación, en la Tabla 3 se presenta la clasificación general del origami.

**Tabla 3**

*Clasificación del origami*

<b>Clasificación</b>	<b>Descripción</b>
De acuerdo con la finalidad	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Artístico: construcción de figuras de la naturaleza o para ornamento, con colores y texturas en los modelos finales.</li> <li>• Educativo: pretende forjar aprendizajes, creatividad o capacidad de resolución de problemas. Es también llamado origami intelectual, para la construcción de figuras para el estudio de propiedades geométricas.</li> <li>• Social: arte empleado para conocer e interactuar con otros.</li> <li>• Recreativo: cuando se utilizan las técnicas para la diversión o entretenimiento entre grupos participantes.</li> </ul>
De acuerdo con la forma del papel	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Papel completo: trozo de papel inicial en forma cuadrangular, rectangular o triangular.</li> <li>• Tiras: trozo inicial de papel en forma de tiras largas.</li> </ul>
De acuerdo con la cantidad de trozos	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Tradicional: un solo trozo de papel inicial (u ocasionalmente dos-tres).</li> <li>• Modular: varios trozos de papel iniciales que se pliegan para formar unidades (módulos), generalmente iguales, los cuales se ensamblan para formar una figura compleja. Este tipo de origami se basa en la construcción de módulos o unidades (generalmente iguales y simétricas) que se pueden ensamblar en cuerpos geométricos para formar figuras.</li> </ul>

*Nota:* elaboración propia, basada en Blanco y Otero (2005); Turpo y Valdivia (2021).

En lo que concierne con el material utilizado para desarrollar las técnicas de origami, se menciona que hay una destacada flexibilidad de recursos aceptados para la elaboración de estructuras tridimensionales y modelos bidimensionales. Concretamente, un modelo artístico puede ser elaborado utilizando papel con características elásticas, de preferencia planos, siempre

que puedan ser plegados sin que sean deformados durante el procedimiento, ya que la formación de patrones en el papel es esencial para el trabajo geométrico (Turner et al., 2016).

A manera general, se distingue que la papiroflexia puede ser categorizada según tres aspectos calificadores que van desde la finalidad práctica que se persigue con el doblado del papel, hasta el material utilizado y cantidad de piezas; esto permite diferenciar que no se trata de un arte estático, sino que puede ser flexible de acuerdo con los intereses propios de la persona practicante, lo que igualmente afianza las amplias aplicaciones que puede tener el origami dentro de los procesos de enseñanza de la geometría.

#### 2.3.4 Uso didáctico del Origami para potenciar el pensamiento geométrico

Como se ha estudiado, el origami implica el ensamblaje de modelos geométricos variados, por lo tanto, existe una estrecha relación entre este arte y la geometría, derivada por la configuración de postulados, teoremas y axiomas aplicados en diferentes creaciones o modelos en papel, ya que los axiomas del origami para la construcción de figuras geométricas ameritan la aplicación de soluciones cuadráticas, ecuaciones cúbicas y diversas fórmulas científicas, por lo tanto, el origami ha venido siendo reconocido como un método eficaz para la enseñanza de nociones matemáticas (Budinski et al., 2018).

Específicamente, se ha fomentado el potencial del origami como herramienta de apoyo en las lecciones de matemáticas (Gur & Kobak, 2017) porque permite mejorar la definición de términos geométricos, consolida el entendimiento del estudiante sobre las formas y temáticas sobre los sólidos estudiados, así como conceder el desarrollo de habilidades necesarias para la resolución de problemas cotidianos y percepción de espacios y/o figuras tridimensionales, a partir de lo cual se trabaja el pensamiento lógico como parte fundamental de las funciones cognitivas individuales (Budinski et al., 2020).

Por su parte, indican Amaya y Gulfo (2009) que la utilidad del origami en la clase de geometría permite desarrollar estrategias metacognitivas en los estudiantes e iniciarlos en el

cálculo algebraico desde un enfoque artístico-lúdico; siendo un puente para el abordaje didáctico de conceptos matemáticos como segmentos, rectas, ángulos, familias de poliedros y composición general de polígonos; así como para el estudio de las propiedades de cada una de estas figuras mediante las cuales se accede a la construcción de módulos requeridos para ensamblar las piezas de papel.

Desde una mirada de las matemáticas, dentro de la papiroflexia están inmersos elementos simples de la geometría, porque en cada pieza de papel se detectan patrones geométricos, ángulos y rectas combinadas que originan diversas formas en papel. De hecho, se reconocen diversas figuras geométricas fundamentales con las que se producen distintos modelos tradicionalmente desarrollados por los japoneses, tales como la cometa, el pez, el pájaro y la rana (Blanco & Otero, 2005).

En orden similar, las aproximaciones de Mejía y Prada (2008) conciben al origami no solo como un arte divertido, sino como método eficiente para el desarrollo de distintas destrezas elementales para la vida, entre las cuales se mencionan: habilidades de comportamiento (a partir de un aprendizaje esquemático derivado de la repetición de acciones y atención a las instrucciones dadas por el profesor guía); aprendizaje colaborativo (ya que el origami es ideal para actividades con grupos de 20 o más estudiantes); desarrollo cognitivo (se utilizan las manos y se promueve la atención para producir resultados visibles, llamativos y satisfactorios); vinculación con la matemática (al doblar el papel se asocian conceptos de simetría y comprensión espacial para modelar figuras tridimensionales).

A partir de lo expuesto, se evidencia que la instauración del arte antiguo del origami dentro de las aulas de matemática y geometría ha resultado una metodología eficiente para encaminar los aprendizajes del estudiante en distintos niveles de instrucción, ya que combina elementos artísticos, conocimiento científico y entretenimiento desde la lúdica y recreación del proceso de enseñanza, para motivar al estudiante hacia la construcción de figuras planas en dos

dimensiones, poliedros en tres dimensiones mediante la asimilación e interiorización del conocimiento geométrico.

## **2.4 Estudios empíricos**

---

Seguidamente, se menciona una serie de estudios relacionados con las variables de análisis. Se presentan evidencias provenientes de la literatura científica y estudios empíricos desarrollados en el ámbito del problema a investigar, que permiten aproximar el estado del arte respecto a la implementación de estrategias didácticas para el desarrollo del pensamiento geométrico y uso pedagógico del origami para la enseñanza de la geometría. En este apartado se analizan investigaciones acerca del objeto de estudio, abordadas desde una perspectiva práctica de la educación formal, en diferentes niveles.

Primeramente, en función de argumentar que una parte fundamental del pensamiento matemático está constituida por el pensamiento geométrico se presenta el estudio desarrollado por Rodríguez y Montiel (2021), cuya investigación buscaba promover esta forma de pensamiento desde las aulas de educación básica. Este estudio fue desarrollado para estudiantes del sistema educativo de secundaria, pertenecientes a una localidad de México, específicamente en las instalaciones de la Universidad de Sonora. El objetivo planteado consistía en diseñar situaciones de aprendizaje con sustento socioepistemológico para promover el desarrollo del pensamiento geométrico en los jóvenes.

En cuanto a los aspectos metodológicos, el estudio se desarrolló sobre los sustentos de una Investigación basada en el Diseño (IBD), como estrategia de trabajo con los estudiantes mediante tareas no convencionales, usando una metodología específica de desarrollo docente. Asimismo, los procedimientos metodológicos ameritaban que el investigador actuara como promotor del desarrollo de los profesores de matemática, en un ciclo continuo de análisis e intervención en los cursos de actualización, salón de clases, discusiones entre colegas u otros

escenarios formativos. El método aplicado estuvo basado en la puesta en marcha de una serie de ejercicios de enseñanza, de los cuales se derivó una propuesta de experimentos sobre el desarrollo del conocimiento de profesores en formación.

Para esta investigación se diseñaron situaciones de aprendizaje partiendo de preguntas motivadoras para el profesor, que fueron aplicadas a través de cuestionarios, para que el docente lograra reconocer que ciertas tareas son de origen algebraico o aritmético, pero pueden trabajarse con formas variadas de interacción matemática. El análisis de los datos se trabajó en dos niveles, los cuales iniciaron con la observación durante las sesiones de trabajo con los profesores, para de esta forma proceder con las intervenciones espontáneas que generaron información valiosa para la didáctica de la geometría. A su vez, se realizó un análisis retrospectivo, enfocado en un bloque o conjunto de sesiones de trabajo con los profesores.

A fin de conocer la pertinencia de la metodología empleada respecto a la manera en la que se desarrolla el trabajo geométrico en las aulas de secundaria, se llevó a cabo una experiencia piloto, compuesta por dos sesiones de 2,5 horas cada una. En la primera sesión, se les aplicó un cuestionario a los docentes para conocer aspectos de su formación matemática y pedagógica; mientras que, la segunda sesión estuvo destinada al acompañamiento de estos docentes en servicio durante el diseño de actividades de aprendizaje. Respecto a los participantes, se trabajó con un grupo de cinco profesores de matemáticas (dos hombres y tres mujeres), además de la profesora-investigadora (responsable de la promoción del desarrollo de las actividades planeadas), observadores del proceso (especialistas en Matemática Educativa), quienes conformaron el equipo investigador.

Las conclusiones del estudio permitieron reflejar un amplio interés en la situación por parte del profesorado participante, quienes mencionaron que les parecía útil esta experiencia práctica para mejorar el entendimiento y trabajo geométrico, porque permite a los aprendices disfrutar de experiencias contextualizadas en clases y desarrollar su pensamiento geométrico. Este estudio

guarda relación con el presente, ya que, se hace hincapié en la confección y diseño de elementos didácticos que pueden adaptarse en las lecciones de geometría, atendiendo a los esquemas de contenidos en los programas y las condiciones del ambiente escolar.

Por su parte, en cuanto al desarrollo del pensamiento geométrico desde la didáctica, se revela en el estudio de Therán y Oviedo (2018), llevado a cabo en la Institución Educativa Gabriel García Márquez de Corozal, del Departamento de Sucre, Colombia. Este trabajo tuvo como principal objetivo indagar si el pensamiento geométrico estudiantil se podría potenciar mediante el empleo de estrategias didácticas basadas en el uso del software Cabri y sobre el modelo de Van Hiele. De la misma manera, la investigación abordaba la necesidad de explorar si es posible desarrollar adecuadamente la competencia matemática y, en todo caso, constatar si existen diferencias significativas entre hombres y mujeres en lo que respecta al desarrollo del pensamiento geométrico.

Metodológicamente, la investigación realizada mantuvo un corte mixto, aplicando métodos cualitativos y cuantitativos para la medición de las variables implicadas, siguiendo un diseño cuasiexperimental. Consecuentemente, la intervención se trabajó durante dos momentos esenciales que iniciaron con la revisión de las características invariables de los rectángulos, trapecios-trapezoides cuadrados, rombos, paralelogramos y romboides; etapa en la que se llevaron a cabo actividades con talleres para identificar y reconocer los cuadriláteros; para luego pasar al segundo momento, en el que se realizó la exploración de cuadriláteros usando la herramienta Cabri Géomètre.

Las actividades se efectuaron con estudiantes de dos cursos del sexto grado de la institución mencionada, procedentes en su mayoría de barrios de la zona urbana, cuyas edades oscilan entre los 11 y 14 años. Desde este estudio se permitió develar la idea que el desarrollo del pensamiento geométrico-espacial resulta factible cuando se trabaja desde la mediación de componentes tecnológicos complementarios para la enseñanza, siempre que el profesorado se

encargue de estructurarlos acorde con su clase, también, se concluyó que el desarrollo del pensamiento geométrico puede potenciarse con prevalencia en los niveles 1 y 2 propuestos por Van Hiele.

El potencial de las estrategias educativas implementadas conjuntamente con herramientas digitales no solo maximiza los conocimientos en geometría, sino que pueden ser potenciadoras de aspectos actitudinales del estudiante, porque concede la colaboración, puesta en común, mediación simétrica y las competencias ciudadanas. Entre este estudio y la actual tesis, existe una relación, porque ambos se centran en la línea del desarrollo del pensamiento geométrico estudiantil, así como la búsqueda de soluciones dinámicas de aprendizaje mediante herramientas diversas para la geometría escolar.

Otro estudio que pone énfasis en la potenciación del pensamiento geométrico mediante la implementación de actividades complementarias en el aula, se corresponde con el trabajo de Rico (2018), que tuvo lugar en la Institución Educativa Bethelmitas Brighton (IEBB) de la Sede Monseñor Rafael y Cadena, un instituto de secundaria ubicado en Pamplona, al Norte de Santander, Colombia. El objetivo central de la investigación fue fortalecer el pensamiento geométrico de los estudiantes del grado noveno de la IEBB, en el desarrollo y aprendizaje de los cuadriláteros, sus elementos notables, características, clasificación, propiedades y teoremas al utilizar diferentes estrategias, desde la aplicación de una herramienta tecnológica.

Los procedimientos implicados en este trabajo de investigación estuvieron encaminados al diseño de una secuencia didáctica basada en los niveles de aprendizaje del Modelo de Van Hiele, manejado sobre una metodología cualitativa desde el enfoque de Investigación-Acción (IA). Fundamentalmente, en este estudio se llevaron a cabo dos etapas para la IA, en una primera fase se efectuó un test diagnóstico para conocer los conocimientos previos de los jóvenes y su nivel de razonamiento y posteriormente, se diseñaron e implementaron 13 actividades inherentes a la secuencia didáctica con el fin de desarrollar el pensamiento geométrico, utilizando las

estrategias de aprendizaje colaborativo y aprender haciendo, aunado con el uso de GeoGebra, por medio de lo cual se garantizara la medición de estos aprendizajes a través de una prueba final que comprobara las destrezas adquiridas en los tres niveles de desarrollo del pensamiento geométrico (visualización, análisis y ordenación/clasificación).

Como participantes del proceso se seleccionó un grupo de estudiantes del grado noveno de la IEBB, donde la población estuvo conformada por 75 estudiantes de dicha etapa, con edades comprendidas entre 13 y 16 años, extrayéndose una muestra de 34 estudiantes del grado noveno 01. Como puntos conclusivos, se resalta que el aprendizaje del grupo fue significativo, mostrando novedades en el nivel de razonamiento y capacidad para crear conceptualizaciones usando lenguaje geométrico. La propuesta didáctica establece una interacción activa, entre los implicados en la formación, facilitando el seguimiento del proceso de aprendizaje de contenidos geométricos. En lo específico, este trabajo guarda estrecha relación con parte de las variables que se estudian en esta investigación, especialmente al concentrarse en los tres primeros niveles de pensamiento geométrico propuestos por Van Hiele.

Paralelamente, en otro contexto educativo, las experiencias de Troncoso (2018) se dirigían hacia el alcance de niveles sólidos de pensamiento geométrico en escolares durante sus primeras etapas de instrucción. La investigación se desarrolló en la Institución Educativa Jesús de Nazareth, ubicada en la ciudad de Cali, Colombia. El objetivo consistió en explorar el aporte del mandala en el desarrollo del pensamiento espacial y geométrico en niños de nivel preescolar, a través de la creación y desarrollo de experiencias de aprendizaje construidas con base en ambos conceptos.

Desde un marco cualitativo se estableció una investigación etnográfica, centrada en la microetnografía y etnografía procesual, para trabajar directamente en el sitio con los grupos. Se aplicaron entrevistas en profundidad y observación participante como técnicas para la recolección de datos. El proceso de investigación partió por indagar en qué grado se encontraba el

pensamiento geométrico del grupo de niños y niñas, mediante observaciones y actividades; posteriormente se construyeron estrategias de aprendizaje con base en el concepto de mandala, implementando juegos, rondas circulares, así como la construcción de mandalas bidimensionales y tridimensionales de pequeño y gran tamaño; para promover el pensamiento espacial y geométrico en los estudiantes desde cuatro aspectos de esta forma de pensamiento: figuras y cuerpos circulares, nociones espaciales, centro geométrico y simetría.

La propuesta de actividades didácticas se aplicó a una población objeto de 14 participantes (siete niños y siete niñas; siete niños de cuatro años y siete niños de cinco años) de la sección de preescolar. Las conclusiones del trabajo derivan que las experiencias de aprendizaje basadas en el concepto de mandala, sirvieron como aporte al pensamiento geométrico en el ambiente del preescolar, ya que los grupos de niños y niñas se mostraron hábiles ante la comprensión de la figura circular, así como otras nociones espaciales respecto a ubicaciones y orientación al interior de los mandalas, por cuanto, se logró promover un aprendizaje de geometría más activo y contextualizado.

En esta investigación se contemplan dos variables, el uso pedagógico de mandalas y el apoyo al desarrollo del pensamiento geométrico. En este sentido, este trabajo se vincula con la presente tesis ya que igualmente se busca compaginar un método conocido y confiable, para acompañar el estudio de conceptos matemáticos, siendo una herramienta potencial para que el estudiante pueda interiorizar conceptos abstractos, motivarse para el estudio, mantener actitudes receptivas para las actividades y fortalecer sus procesos de pensamiento.

Por su parte, como referente sobre el manejo de estrategias didácticas para desarrollar el pensamiento geométrico, se cita el trabajo realizado por Camacho y Yubrán (2020) en la Institución Educativa Departamental Humberto Velásquez García, localizada geográficamente en la zona Bananera del Departamento de Magdalena, Colombia, que tuvo la intención de fortalecer

las estrategias didácticas para el desarrollo del pensamiento geométrico en el nivel básica primaria del centro educativo, a través del trabajo cooperativo.

La metodología se basó en el enfoque cualitativo, concretamente en el paradigma socio-crítico, ejecutado desde el método IA, además de emplear análisis de contenidos, entrevistas semiestructuradas y grupos de discusión durante la recogida y procesamiento de los datos. Se inició con un diagnóstico sobre las necesidades en la enseñanza de geometría y desarrollo del pensamiento geométrico. Sucesivamente se promovió la ejecución de la propuesta de formación docente para el desarrollo de estrategias optimizadoras del pensamiento geométrico a través del trabajo cooperativo. Dicha propuesta constó de ocho talleres en los que se impartieron contenidos de geometría, herramientas para el trabajo cooperativo, explicaciones sobre el Modelo de Van Hiele, mención de estrategias didácticas para desarrollar el pensamiento geométrico y finalmente, se dio la posibilidad al profesorado de diseñar estrategias propias y empoderarse en el proceso.

Durante este estudio se contó con la participación de cinco docentes que laboran en la institución a nivel de enseñanza básica primaria, quienes funcionaron también como informantes clave para la revisión de las fuentes de información (guías didácticas de tercer, cuarto y quinto grado de primaria, del año escolar 2020) para la determinación de hallazgos. Se concluyó que, mediante el diseño, implementación y evaluación de estrategias didácticas contextualizadas en clases de matemática y geometría, en las que se permita al estudiante interactuar con sus pares para la resolución de dilemas métricos, se promueve el desarrollo del pensamiento geométrico en primaria. La relación que tiene esta investigación con la presente radica en la consideración de estrategias específicas para el desarrollo del pensamiento geométrico, como necesidad escolar, con énfasis en el rol activo de los docentes y estudiantes durante el proceso de aprendizaje de contenidos geométricos.

Adicionalmente, en lo que concierne con la variable del pensamiento geométrico, se considera que los aportes de Santos (2021) originados desde su experiencia práctica en el aula

de matemáticas son significativos y congruentes con la presente investigación. En tal sentido, se desarrolló un estudio en la Institución Educativa Jhon F. Kennedy localizada en Barrancabermeja, Colombia, cuyo objetivo general fue determinar en qué medida la aplicación de herramientas de aprendizaje en ambientes virtuales fortalece el pensamiento geométrico en estudiantes de quinto grado, en el año 2019.

De acuerdo con la naturaleza procedimental del estudio, se trabajó una investigación de tipo aplicada bajo un enfoque cuantitativo, con diseño cuasiexperimental, en la que se aplicó como método base el hipotético-deductivo. Propiamente, los procedimientos atendieron a la utilización de dos instrumentos: una encuesta, para recopilar la información referente al proceso enseñanza-aprendizaje de matemáticas (desde sus dimensiones informativa, práctica, así como el uso de recursos, evaluación, didáctica, y actitudes mostradas); y la prueba de conocimiento para medir los tres primeros niveles del modelo de Van Hiele, usando la prueba t-Student, para el registro estadístico entre ambas pruebas. El método usado permitió la división de la muestra en dos grupos experimentales (a quienes se dirigió una intervención con herramientas innovadoras) y un grupo de control, con estudiantes de quinto grado de primaria.

La población atendida en esta investigación estuvo constituida por la totalidad de estudiantes de quinto de primaria del centro mencionado, en sus clases obligatorias del área de matemáticas. Estos estudiantes tienen edades entre los 9 y 12 años, que equivalen 750 estudiantes. De esta población, se realizaba un muestreo aleatorio por racimos para seleccionar 90 alumnos (configurados en 3 grupos de 30 estudiantes cada uno).

A partir de las intervenciones de medición aplicadas a los grupos, se concluye que la aplicación de herramientas de aprendizaje con tendencias innovadoras incide favorablemente en el desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes, puesto que los niveles de desempeño en torno al pensamiento geométrico de los niños y niñas mejoró considerablemente en los dos grupos experimentales, quienes interactuaron con las herramientas de aprendizaje;

con diferencia significativa de medias para los grupos de control y experimentales con un p valor de  $0.022 < \alpha (0.05)$ . Particularmente, este estudio se relaciona con el actual en cuanto a considerar el uso de recursos tecnológicos como elementos potenciadores del pensamiento geométrico.

Por su parte, en lo que respecta a la variable de origami, son múltiples los referentes que informan sobre el uso de este arte japonés para el aprendizaje de conceptos geométricos. En este caso, se menciona la investigación de Quispe (2022) asociada con la aplicación de las técnicas del origami para la mejora de aprendizajes geométricos. El lugar de estudio corresponde con la Institución Educativa Primaria Wenceslao Molina Torres-Putina, la cual se halla en el poblado Putina, provincia de San Antonio de Putina, Perú. El objetivo general fue determinar la eficacia de la técnica del origami en la mejora del aprendizaje de las figuras y elementos geométricos en los niños del segundo grado de la institución.

A través de un tipo de investigación experimental, bajo enfoque cuantitativo, y con diseño de investigación cuasiexperimental, el método aplicado en este trabajo consistió en la selección de un grupo control y grupo experimental, a quienes se les aplicó una prueba de entrada y de salida a fin de detectar la incidencia entre las variables de estudio. Como instrumento para la recolección de datos se diseñó el pretest (aplicado al comienzo para medir la comprensión de textos), y el test final (aplicado al cierre del experimento, diseñado con los mismos ítems para el único grupo). Para este trabajo, la población de participantes estuvo establecida por la totalidad de niños y niñas inscritos en las diferentes secciones del segundo grado (19 niños distribuidos en dos secciones A y B) del centro educativo. Los estudiantes del segundo "B" fueron el grupo control (8 estudiantes), mientras que los estudiantes del segundo "A" (8 estudiantes) conformaron el grupo experimental.

Las conclusiones generales que pueden extraerse de esta intervención aluden a que la práctica del origami en los niños mejora notablemente el aprendizaje de las figuras, líneas,

elementos geométricos, así como el abordaje de problemas matemáticos (ya que un 90% de los estudiantes obtuvo puntuaciones destacadas tras la intervención). Por estos motivos, se afirma que el origami es una técnica didáctica efectiva, concibiéndose en este sentido una relación entre ambos estudios, establecida por la búsqueda de una mediación de saberes sobre figuras y elementos geométricos, desde el empleo del origami, para mejorar en los estudiantes sus habilidades para la interpretación geométrica, precisión manual, así como funciones ejecutivas como la atención, memoria y paciencia para desarrollar el pensamiento geométrico.

En adición, a partir del trabajo empírico de Cuadrillero (2021) se afianza la correlación presente entre el origami y el aprendizaje de la geometría. La investigación parte desde unas jornadas realizadas en una escuela taller de arte, donde niños de 5 a 12 años recibían clases de papiroflexia, en un barrio de Valladolid, al noroeste de España. El objetivo del estudio se basaba en demostrar que la incorporación de técnicas manipulativas como el origami contribuye con el aprendizaje de la geometría y al desarrollo de la creatividad del estudiante a través del juego.

Partiendo de ello, el trabajo establecía una propuesta didáctica guía para la incorporación del origami en las clases de educación primaria, por lo que se asumió una metodología de investigación holística y lúdica, que ayude al estudiante a interiorizar la geometría y desarrollar su potencial de pensamiento. La intervención educativa estuvo configurada en tres sesiones sucesivas, que comenzaron por la presentación de figuras y sus despliegues, para la elaboración de dos figuras base. Seguidamente, se desarrolló una segunda sesión en la que se abordó la elaboración completa de las dos figuras finales; y durante la última sesión didáctica, se ejecutaron acciones prácticas para complementar y mejorar las figuras elaboradas, añadiendo elementos complementarios desde la figura base.

En cuanto a los participantes, la propuesta de intervención estuvo dirigida hacia estudiantes de cuarto de primaria, que previamente tuvieran conocimientos o experiencias de trabajo con origami. El aula estuvo integrada por 20 estudiantes distribuidos para cada parte de las sesiones,

a fin de concentrar y aprovechar los recursos disponibles en el sitio. Desde esta propuesta didáctica se concluye que el origami no solo potencia destrezas manuales, sino que apoya el aprendizaje de conceptos y términos, búsqueda de simetrías, generación de patrones a partir de pliegues, así como la potenciación de la capacidad creativa en los niños y niñas. Esta investigación se relaciona con la presente en cuanto a que se establecen las ventajas didácticas del origami para desarrollar las destrezas en el dominio de la geometría y apoyo a la creatividad en el aula.

Por su parte, en aras de fortalecer una comprensión integral acerca del uso del origami y su pertinencia en el desarrollo de temas geométricos y/o matemáticos, se hace referencia al trabajo de Figueroa et al. (2021), planteado formalmente para institutos de la localidad de México. El objetivo general de este estudio fue generar una propuesta para crear procesos de análisis respecto a las matemáticas usando la técnica origami. En lo que concierne a la metodología aplicada, este trabajo se enmarca en el tipo de investigación proyectiva, porque establecía la divulgación sobre el uso del origami para generar procesos de comprensión matemática; por cuanto, se propuso el desarrollo de un taller de aplicación sobre la papiroflexia como guía de acciones, considerándose en este caso como referente teórico el Modelo de Van Hiele para la determinación de niveles de pensamiento geométrico y razonamiento en los involucrados.

Básicamente, se planteó un taller educativo concebido como unidad productiva de conocimientos propios de una realidad concreta, para que los estudiantes puedan establecer convergencias entre el conocimiento teórico y práctico inherente a la competencia matemática. Se propuso un espacio de interacción entre participantes, así como de formación en distintos campos a través de la realización de actividades específicas con el material (trozos de papel) e instructivos guías.

La propuesta de divulgación estuvo contemplada en una serie de fases continuadas que iniciaron con la información (para la identificación de saberes previos en el estudiante);

orientación dirigida (realización de actividades para la confección de modelos en papel, asociando conceptos básicos sobre el tema de estudio); explicitación (momento en el cual se argumentaron los procedimientos para la elaboración de modelos y se retroalimentaron los resultados); finalizando con la fase de integración (entre saberes previos y nuevos). En este particular, se planteó que el taller formativo tuviese un corte amplio y flexible, para ser aplicado en etapas tempranas como el preescolar hasta más avanzadas en el ámbito académico.

Como conclusiones generales del trabajo, se destaca que el manejo del origami no fue un proceso lineal, sino que, contrariamente, la asociación de conceptos va ocurriendo según se desarrollen los procesos de aprendizaje. De la misma manera, se determinó que, mediante la manipulación de materiales como el papel, se facilita la adquisición de conceptos nuevos que permiten al estudiante progresar hacia niveles superiores de desarrollo de su pensamiento geométrico, además de potenciar la comunicación, razonamiento, percepción espacial, destreza motriz, exactitud y precisión, como parte de los procesos generales de matemáticas. Al igual que la actual tesis, esta investigación propone apoyar la didáctica de la geometría como parte de la competencia matemática contemplada en el currículo nacional, por lo tanto, ambos estudios coinciden en el hecho de implementar el origami como metodología activa en la educación formal, para el fortalecimiento de conceptos matemáticos y espaciales mediante los cuales el estudiante desarrolle su propio pensamiento geométrico.

De manera similar, la investigación desarrollada por Turpo y Valdivia (2021) dentro de la Institución Educativa World School, ubicada en la calle Juana Espinoza del distrito, provincia y departamento de Arequipa, Perú, mostró un modo de intervención escolar basada en la evaluación de grupos, cuyo objetivo fue determinar en qué medida la aplicación de la técnica del origami mejora el desarrollo de la geometría en un grupo de estudiantes del primer grado de etapa primaria. Desde una perspectiva metodológica, la investigación es cuantitativa y con diseño preexperimental, para la cual se elaboró una prueba previa y posterior, manejando análisis

estadístico de tipo t de Student. Por su parte, para cumplir con el objetivo previsto en la investigación se utilizó la técnica de la observación y encuesta, además de aplicar un cuestionario como instrumento de medición de las competencias geométricas en los estudiantes.

Los participantes de la investigación fueron grupos de estudiantes (14 niños y 17 niñas precisamente) para un total de 31 estudiantes del primer grado de primaria, a quienes se aplicó una prueba de evaluación para medir el nivel de desarrollo de la geometría, antes y después de trabajar con nociones de origami. Los resultados del trabajo confirmaron que, una vez que fue aplicada la técnica de origami, los estudiantes mejoraron de manera significativa el desarrollo de nociones geométricas. De hecho, el resultado de la preprueba indicó que la mayoría de los estudiantes estaba en nivel inicial de pensamiento geométrico, y luego, tras la práctica de origami, un 70% alcanzó niveles destacados en el desarrollo geométrico.

La relación de este trabajo con la tesis está determinada por la asociación de las técnicas de origami como potenciadoras del conocimiento geométrico, siendo relevante que se adopten estas herramientas por los docentes para fortalecer el proceso de enseñanza-aprendizaje de conceptos abstractos propios de la geometría, además de concebir que las habilidades individuales para la geometría implican la necesidad de trabajar aspectos visuales, gráficos, comunicativos e interactivos entre los grupos participantes.

A su vez, otro estudio empírico que permite aproximar el impacto positivo del origami para la mejora del proceso de enseñanza de la geometría corresponde con el trabajo de Montes y Frausto (2021), motivado por las situaciones de enseñanza en Tunja, específicamente en la Institución Educativa Escuela Normal Superior Santiago de Tunja - Sede Central, del Departamento de Boyacá, Colombia. Esta investigación partió desde el objetivo de analizar la incidencia del origami como estrategia didáctica para mejorar la enseñanza de la geometría en el referido contexto.

La metodología del estudio consistió en una IA con enfoque cualitativo, ya que se indagó acerca de la capacidad estudiantil para el aprendizaje de geometría mediante el origami, así como las dificultades presentadas por una parte de los educandos participantes, para hacer la descripción de hallazgos tanto en los grupos experimental como de control. En total, fueron diseñados 10 talleres de origami encaminados hacia la enseñanza de geometría con los dos grupos experimentales. Por su parte, en cuanto a los dos grupos de control, la enseñanza de estos contenidos se continuó desde esquemas tradicionales de instrucción.

La secuencia didáctica iniciaba con los primeros talleres en los que se estudiaron bases fundamentales sobre origami y el plegado, desde la activación de nociones geométricas en cada estudiante, donde se les entregó un folio cuadrado de papel para practicar los primeros pasos de la papiroflexia, luego, las siguientes sesiones consistieron en la confección de figuras bidimensionales con cierta complejidad, hasta poder elaborar modelos tridimensionales fundamentados en geometría. En cada sesión se trabajó con material manipulable como el papel convencional, para facilitar la progresión de los estudiantes hacia niveles más altos de pensamiento geométrico.

Las estrategias didácticas fueron desarrolladas con la participación de estudiantes de sexto grado de la escuela, pertenecientes a la jornada de la tarde. Al mismo tiempo, el docente fue partícipe del proceso, ya que se encargó de ofrecer asesoría y seguimiento durante el desarrollo de cada taller. Las conclusiones del trabajo expresan que el origami puede llevarse hacia el aula de geometría o matemática, siendo una estrategia didáctica significativamente incidente en el aprendizaje de conceptos geométricos. En este orden de ideas, los resultados derivados mostraron que la mayoría de los participantes del grupo experimental experimentó avances en la comprensión de mediatrices, bisectrices angulares, triángulos, polígonos, congruencia y simetría. Puntualmente, la relación entre ambas investigaciones se justifica desde la necesidad de

determinar el potencial didáctico del origami para optimizar los procesos de enseñanza de la geometría y con esto, el pensamiento geométrico del estudiante.

En virtud de lo antes expuesto, también es pertinente hacer mención de ciertos estudios anglosajones, los cuales aportan valiosos complementos a las ideas expuestas en cada una de las referencias teóricas que sustentan esta tesis. De esta manera, sobre una perspectiva de abordaje similar, ante la necesidad de incluir actividades por medio de las cuales un estudiante participe efectiva y activamente en el proceso de enseñanza de la geometría desde la incorporación del origami en el aula, se destaca la investigación desarrollada por Kögce (2020), quien propuso una actividad que fue realizada por ocho futuros profesores de la clase de matemáticas, en tres escuelas diferentes de la localidad de Turquía.

El objetivo general de este trabajo fue presentar una actividad ejemplar sobre cómo se puede usar el origami al enseñar matemáticas en las escuelas secundarias, y determinar las opiniones de los futuros maestros de matemáticas sobre la actividad desarrollada. En aras de corresponder con el cumplimiento del objetivo, se trabajó un estudio descriptivo, cuya metodología se vincula con un diseño de investigación cualitativa. En particular, los datos se recogieron de dos maneras diferentes: primeramente, se llevó a cabo la Actividad del Cubo Espiral y el Prisma Cuadrado, que los futuros docentes pudieron construir conjuntamente durante el curso; seguidamente, se manejó un formulario con cuatro preguntas abiertas y estructuradas como instrumento de recogida de información, a fin de determinar las opiniones del grupo de profesores de matemáticas sobre la primera actividad.

Propiamente, la intervención de las prácticas formativas se fijó para el curso de Enseñanza de Matemáticas con Origami, con duración planificada de tres semanas en las que se trabajaron nueve horas lectivas (tres horas de clase por sesión). La primera semana de actividades permitió que el instructor mostrara a los futuros maestros cómo hacer el Cubo Espiral y el Prisma Cuadrado, realizando los procesos de manera secuencial y al mismo tiempo que el guía,

repetiendo el procedimiento para ganar pericia. Durante la segunda semana, los maestros en formación debían escribir las instrucciones de plegado, además de compartir pensamientos y apreciaciones. Por último, el grupo fue dividido en ocho equipos de cuatro personas y se solicitó a cada equipo conformado que efectuara sus pasantías prácticas con estudiantes de sexto grado en sus escuelas secundarias y con profesores de matemáticas.

La totalidad de participantes fue de 32 pasantes cursantes del Programa de Enseñanza de Matemáticas Elementales, de la Facultad de Educación de una universidad pública. En conclusión, los aportes arrojados desde esta actividad práctica determinaron que los participantes reconocieran el valor educativo del origami y tomaran conciencia acerca de cómo implementarlo en sus cursos para la mediación de conceptos matemáticos. De igual modo, las actividades de aprendizaje geométrico trabajados con las técnicas de origami permiten aumentar la participación estudiantil en el aula, apoyan la motivación, estimulan la curiosidad, ofrecen un entorno de aprendizajes lúdico y, acceden al desarrollo del pensamiento geométrico. Concretamente, se señala la relación presente entre las investigaciones, ya que se enaltece el potencial del origami dentro de la enseñanza de las matemáticas y geometría, siendo indispensable desarrollar actividades relacionadas con el uso del origami en estos ambientes de enseñanza.

Por su parte, en el estudio desarrollado por Ndubisi y Arokoyu (2022) se investigó acerca de los procesos de instrucción basados en el origami y su relación con el desempeño académico de estudiantes de secundaria, dentro del aula de matemáticas en 18 escuelas básicas públicas ubicadas en el área de gobierno local de Port Harcourt del estado de Rivers, Nigeria. Esta investigación tuvo como objetivo investigar el efecto de la instrucción basada en origami en el rendimiento académico en matemáticas de estudiantes de secundaria del área descrita.

La metodología del estudio estuvo enmarcada en un diseño cuasiexperimental, en la que se aplicaron pruebas de pretest, tratamiento y postest. En cuanto al proceso de recolección de datos se usó el instrumento “Geometry Performance Test” conformado por 25 ítems de opción

múltiple en Geometría Sólida. Además, el diseño de investigación empleado fue de clase intacta no equivalente, no aleatorio, antes y después de la prueba, que fue presentada ante un grupo experimental y de control. En este caso, la intervención implicó que al grupo experimental se enseñara geometría basada en origami, mientras tanto, el grupo de control fue atendido con instrucción basada en gráficos.

La población de estudio estuvo totalizada por cuatro mil quinientos ochenta y cuatro estudiantes del centro educativo. Para la selección de los participantes, se aplicó la técnica de muestreo polietápico y se extrajo una muestra de 104 estudiantes de JSS1 de secundaria del estado de Rivers. Desde los resultados obtenidos en las pruebas aplicadas, se concluyó que los estudiantes atendidos mediante instrucción basada en origami, tuvieron alto rendimiento en comparación con los que fueron enseñados mediante gráficos, con diferencia estadísticamente significativa. Por estas razones, se asumió que la utilidad del origami como herramienta formativa mejora el rendimiento estudiantil en el área de geometría. En virtud de lo expresado, esta investigación guarda relación con la presente tesis porque se apuesta por aplicar un proceso de mediación de contenidos geométricos a través del origami, y velar por una mejora en los resultados de aprendizaje y competencias en matemáticas.

## **2.5. Marco legal de la investigación**

---

Entre los instrumentos legales que respaldaron la realización de esta investigación se encuentra en primer lugar, la Constitución Política de Colombia (1991), en cuyo artículo 67 se declara el derecho de los ciudadanos a la educación como un servicio público y social. En este sentido, se consideró propicio el desarrollo de esta investigación pues mediante la misma se integran a los procesos educativos, especialmente del área de matemáticas, estrategias y herramientas didácticas que incrementan la motivación y participación de los estudiantes, lo que redundará en una mayor calidad del servicio educativo.

En segundo lugar, se cita como marco legal de esta investigación la Ley General de Educación (1994), en la cual desde su artículo 1º señala que el objeto de esta ley es el proceso de educación. En este orden de ideas, en diversos artículos se establece que la investigación es una actividad relevante dentro del sistema educativo colombiano, como en el artículo 4º, donde se relaciona la investigación educativa como un factor para incrementar la calidad y cubrimiento del servicio; el artículo 5º en el que la investigación se presenta como una finalidad de la educación; y el artículo 109, en el cual se establece que una de las finalidades de la formación de los educadores, es el fortalecimiento de la investigación en el campo pedagógico como en su área específica de conocimientos. Todo lo anterior, fundamenta desde una perspectiva legal, el desarrollo de la presente investigación.

A modo de conclusión, en este capítulo se ha realizado un recorrido por los principales aspectos relacionados con las variables de este estudio, el pensamiento geométrico como parte del desarrollo integral de los estudiantes y el origami como estrategia didáctica pertinente para incrementar este tipo de pensamiento matemático. También se han presentado un conjunto de referentes empíricos que se relacionan con la investigación de forma directa y que aportan datos de interés que serán utilizados en el apartado de discusión de resultados.

## **CAPÍTULO III MÉTODO**

En este capítulo se expone el método utilizado para el desarrollo de la investigación detallando sus componentes, comenzando por los objetivos de la investigación, incluyendo la descripción de la población y el escenario donde se realizó el trabajo de campo. Del mismo modo, se describe el instrumento de recolección de datos con sus propiedades psicométricas, como la validez y la confiabilidad. También se explica el procedimiento general seguido en la investigación, el método específico y la operacionalización de las variables. Se describe cómo se analizaron los datos, y, finalmente, pero no menos importante, se presentan las consideraciones éticas seguidas en la realización del estudio.

### **3.1. Objetivos**

---

#### 3.1.1. Objetivo General

Evaluar los efectos de un programa de origami sobre el pensamiento geométrico de los estudiantes del grado tercero de primaria de la Institución Educativa Distrital Alemania Unificada (Bogotá D.C. – Colombia).

#### 3.1.2. Objetivos Específicos

- Describir el pensamiento geométrico en los estudiantes del grado tercero de primaria de la Institución Educativa Distrital Alemania Unificada (Bogotá D.C. – Colombia).
- Diseñar un programa de origami para potenciar el desarrollo del pensamiento geométrico en estudiantes del grado tercero de primaria de la Institución Educativa Distrital Alemania Unificada (Bogotá D.C. – Colombia).
- Comparar el pensamiento geométrico de los estudiantes que interactuaron con el programa de origami con el de los estudiantes que recibieron clases tradicionales en el tercer grado de primaria de la Institución Educativa Distrital Alemania Unificada (Bogotá D.C. – Colombia).

### 3.2. Participantes

---

La población en una investigación se define como el conjunto de casos que coinciden con una serie de especificaciones, mientras que la muestra es un subgrupo representativo de la población (Hernández-Sampieri & Mendoza, 2018).

En cuanto a la población de esta investigación, está conformada por los 108 estudiantes del tercer grado de Educación Básica Primaria, en la Institución Educativa Distrital Alemania Unificada, ubicada en Bogotá, Colombia, quienes se distribuyen en cuatro grupos académicos, atendidos en los turnos matutino y vespertino de la institución, tal como se especifica en la Tabla 4.

**Tabla 4 Distribución de los estudiantes de tercer grado**

*Distribución de los estudiantes del tercer grado*

Turno	Sección	Cantidad de estudiantes
Matutino	301	28
	302	27
Vespertino	301	26
	302	27
TOTAL		108

*Nota:* elaboración propia con base en los registros de matrícula de la I.E.D. Alemania Unificada.

Con respecto a la muestra seleccionada, debido a las características del diseño de este estudio, que se presentan en apartados posteriores, se optó por una muestra no probabilística o dirigida, en la que la elección de los sujetos no depende de la probabilidad, sino de las características de la investigación (Hernández-Sampieri & Mendoza, 2018), sin embargo, la elección de los sujetos en este tipo de muestras se realiza de acuerdo a ciertos criterios, en el

caso de la presente, el criterio de inclusión es ser estudiante del tercer grado de Educación Básica Primaria en la I.E.D. Alemania Unificada durante el periodo académico 2022.

La elección de una muestra no probabilística para este estudio se justifica desde el planteamiento del problema, en el cual se ha establecido que los estudiantes del tercer grado presentan debilidades en su pensamiento geométrico, las cuales deben ser abordadas y, además, por el objetivo general formulado, que se dirige a evaluar los efectos de un programa de origami como variable independiente sobre este tipo de pensamiento de los estudiantes.

Con base en este objetivo, puede notarse que el diseño del estudio requirió el abordaje de la muestra de una forma dedicada y minuciosa, toda vez que el grupo experimental participó en un programa educativo, que a efectos de la investigación, no podría extenderse a una gran población de estudiantes, por lo tanto, lo más importante para este estudio no es que la muestra sea representativa, sino la calidad de la intervención y de las observaciones realizadas, a fin de valorar los resultados obtenidos de la misma (Hernández-Sampieri & Mendoza, 2018)

Por lo anterior, no se aplicaron técnicas de muestreo ni fórmulas para calcular el tamaño de la muestra, sino que la misma quedó conformada por 55 estudiantes, que están distribuidos en dos grupos del tercer grado del turno vespertino, uno de ellos control y el otro experimental, tal como se detalla en la Tabla 5.

**Tabla 5**

*Distribución de la muestra*

Grupo	Sección	Cantidad de estudiantes
Control	302	27
Experimental	301	28
TOTAL		55

*Nota:* elaboración propia con base en los registros de matrícula de la I.E.D. Alemania Unificada.

### **3.3. Escenario**

---

El escenario en el cual se desarrolló esta investigación es la Institución Educativa Distrital Alemania Unificada del Distrito Capital de Bogotá, Colombia, la cual se encuentra ubicada en la localidad de San Cristóbal, Barrio Las Guacamayas. Esta institución presta servicio educativo de carácter público y atiende a los niveles educativos de preescolar, básica primaria y básica secundaria en jornada diurna (matutina y vespertina), distribuidas en sus 2 sedes, A y B, ubicadas en el mismo barrio.

En la sede B se atienden los cursos de básica primaria (1º a 5º), y cuenta con una matrícula actual de 420 estudiantes, distribuidos en 26 cursos. La población atendida pertenece a familias de nivel socioeconómico 2. Esta sede cuenta con 16 aulas, salones lúdicos, salón de informática y oficina de orientación, entre los espacios académicos.

### **3.4. Instrumentos de recolección de información**

---

El instrumento de recolección de datos fue diseñado específicamente para esta investigación. El mismo consiste en una prueba de conocimientos sobre el pensamiento geométrico dirigida a estudiantes del tercer grado, conformada por 18 ítems de selección simple con opciones múltiples de respuesta, similar a las planteadas por el ICFES en las Pruebas SABER en la que se retoman las propuestas del MEN (2006) sobre los indicadores de desempeño para evaluar el componente del pensamiento geométrico en la competencia matemática.

En este instrumento se puntúan las respuestas correctas con un punto, mientras que las incorrectas no generan puntuación. Seguidamente se contabilizan todos los puntos alcanzados en cada dimensión para obtener el puntaje total de estas, así como de la variable general. En el caso de las dimensiones, el puntaje puede ubicarse en un rango entre 0 y 6 puntos, mientras que para la variable este puntaje puede ir desde 0 hasta 18 puntos. Para interpretar estos puntajes

se elaboró el baremo que se muestra en la Tabla 6, dividiendo el puntaje máximo de las dimensiones y de la variable entre tres, ya que para la evaluación del nivel de pensamiento geométrico en esta investigación se requieren tres categorías.

**Tabla 6**

*Baremo para la interpretación de promedios*

Puntaje obtenido en la dimensión	Puntaje obtenido en la variable	Categoría de pensamiento geométrico
[0-2)	[0-6)	Bajo
[2-4)	[6-12)	Medio
[4-6]	[12-18]	Alto

*Nota:* elaboración propia (2022).

Luego de construir la versión preliminar de la prueba de conocimientos sobre pensamiento geométrico, se estimaron la validez y la confiabilidad del mismo, características que permiten garantizar la calidad de los resultados cuando se miden aspectos psicoeducativos (Ruiz, 2013).

Según Hernández-Sampieri y Mendoza (2018) la validez de un instrumento expresa el grado en el que éste mide exactamente la variable que pretende medir, mientras que la confiabilidad se relaciona con el grado en el que dicho instrumento genera resultados coherentes y consistentes. Para estimar estas propiedades de los instrumentos de medición existen diversas técnicas y criterios.

En el caso de la validez de la prueba de conocimientos diseñada para esta investigación, se estableció la validez de contenido mediante el juicio de expertos, ya que es necesario determinar si los ítems empleados son representativos del dominio del contenido que se pretende medir, es decir, del pensamiento geométrico (Ruiz, 2013). Para hacerlo, se seleccionaron cinco expertos que valoraron de forma independiente la calidad de los ítems y del instrumento en general, siguiendo como criterios la claridad y precisión de las instrucciones y de los ítems, su

pertinencia con la variable de estudio, y la organización general de estos a lo largo del instrumento.

A estos jueces se les suministró un formato de validación que consta de los datos generales de la investigación, la operacionalización de la variable en estudio, la prueba de conocimientos sobre pensamiento geométrico, y finalmente un formato para expresar el juicio sobre la prueba (Anexo 1). Una vez recopilados los cinco juicios de los expertos, se procedió a revisar sus opiniones respecto de cada ítem de la prueba y de esta en general, recopilando a su vez las constancias de validación emitidas por ellos (Anexo 2). Finalmente, se consideraron todas estas observaciones para refinar el instrumento y elaborar la versión definitiva del mismo (Anexo 3).

Con respecto al cálculo de la confiabilidad del instrumento de recolección de datos, la versión definitiva del mismo fue aplicada a un grupo piloto, para determinar el comportamiento de los ítems. Este grupo piloto estuvo conformado por 20 estudiantes que forman parte de la población, pero no de la muestra.

El procedimiento empleado en este caso fue la confiabilidad de consistencia interna, mediante el coeficiente Kuder Richardson, que arroja como resultado un coeficiente cuyo valor se ubica entre 0 y 1, el cual revela mayor confiabilidad cuanto más cerca se encuentra de 1. En este cálculo se empleó la siguiente fórmula:

$$Kr_{20} = \left( \frac{n}{n-1} \right) \left( \frac{s^2 - \sum p \cdot q}{s^2} \right)$$

Donde:

$Kr_{20}$  = coeficiente de confiabilidad de Kuder Richardson

n = número de ítems o reactivos

s = varianzas de los ítems

p = probabilidad de ocurrencias (éxitos)

q = probabilidad de no ocurrencias (fracasos)

Una vez aplicada la fórmula a los datos obtenidos de la prueba piloto, se obtuvo un coeficiente de confiabilidad de 0,702 que indica una confiabilidad alta, según el baremo elaborado por Ruiz (2013), tal como se muestra en la Tabla 7, por lo tanto, este instrumento pudo ser aplicado a los grupos que participaron en el estudio.

### **Tabla 7**

*Baremo para la interpretación del coeficiente confiabilidad*

Rangos	Magnitud
0,81 – 1,00	Muy alta
0,61 – 0,80	Alta
0,41 - 0,60	Moderada
0,21 – 0,40	Baja
0,01 – 0,20	Muy baja

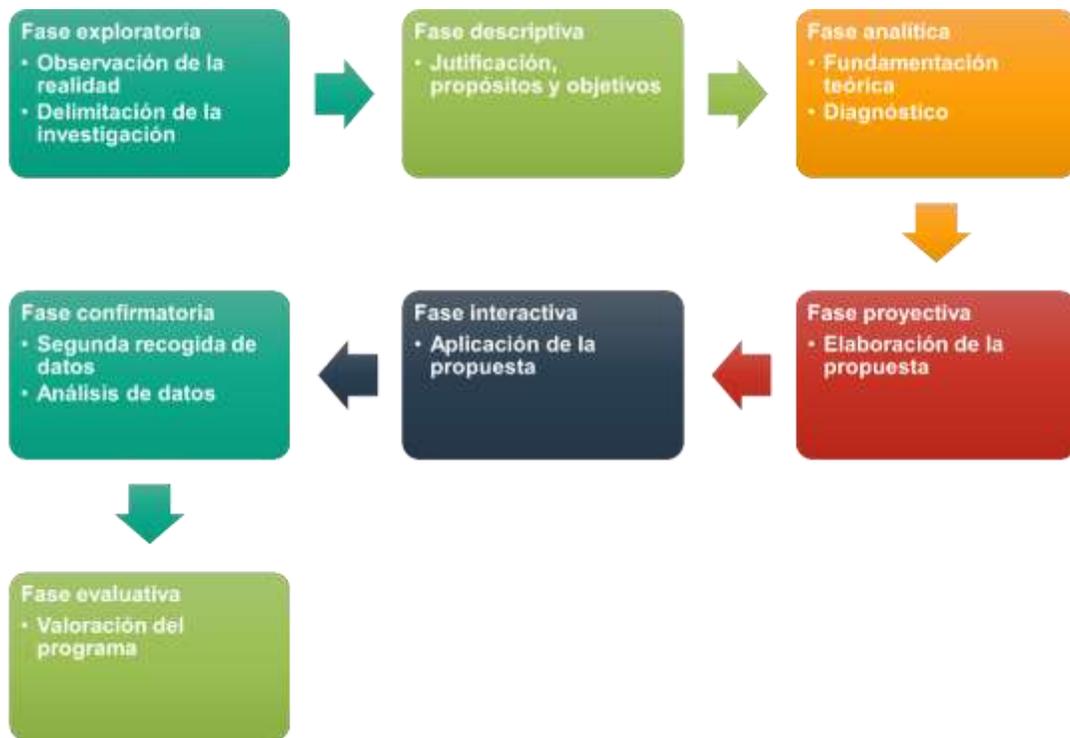
*Nota:* tomado de Ruiz (2013).

### **3.5. Procedimiento**

Para desarrollar esta investigación se ha seguido un procedimiento compuesto por siete fases, en cada una de las cuales se han desarrollado ciertos procesos inherentes al momento en que se encuentra la investigación de cada fase, tal como se indica en la Figura 2.

**Figura 2 Procedimiento seguido en la investigación**

*Procedimiento seguido en la investigación*



### 3.6. Diseño del método

---

La investigación desarrollada se corresponde con un enfoque cuantitativo, en el cual se utilizan métodos y técnicas cuantitativas para medir las variables en estudio y sus resultados se analizan estadísticamente (Ñaupás, 2018). En cuanto al paradigma, la investigación se enmarca en el positivismo, que se caracteriza por utilizar el método hipotético deductivo, por considerar que el conocimiento proviene de la experiencia planificada y controlada, y tiene como objetivo la verificación de hipótesis con base en las teorías establecidas (Hurtado, 2010).

En cuanto al tipo de investigación, esta se tipifica como evaluativa. Según De la Orden (1985, como se citó en García et al., 2001), la investigación evaluativa es un proceso sistemático

por el cual se recolecta y se analiza información sobre determinado programa educativo. Por su parte, Weiss (1990) manifiesta que el objeto de estas investigaciones consiste en medir los efectos de un programa. Patton (1990, como se citó en García et al., 2001) manifiesta que en estas investigaciones el propósito es informar a la acción y guiar la toma de decisiones, para aplicar el conocimiento en la solución de problemas humanos y sociales.

### 3.6.1. Diseño

El diseño seguido en esta investigación se corresponde con el cuasiexperimental, en el cual se manipula la variable independiente (programa basado en el origami) para observar su efecto sobre la variable dependiente (pensamiento geométrico), y en el que los sujetos no son asignados a los grupos en estudio por el azar, sino que se trabaja con grupos que estaban conformados previamente por criterios no relacionados con la investigación (Hernández-Sampieri & Mendoza, 2018).

Al efecto, se constituyeron los grupos de estudio, independientes, uno control y el otro experimental, a los cuales se les aplicó el pretest para medir la variable dependiente, pensamiento geométrico, que permitió establecer la equivalencia inicial de los grupos. Luego el grupo experimental participó en el tratamiento experimental, en este caso, el programa basado en origami, mientras que el grupo control recibió clases de forma tradicional. Posteriormente, se aplicó el posttest a ambos grupos para medir por segunda vez la variable dependiente, de modo que pudieran compararse estas medidas y establecer las diferencias significativas atribuibles al efecto del tratamiento experimental. Este puede representarse gráficamente como muestra la Figura 3.

### Figura 3 Diagrama del diseño con pretest, postest y grupos intactos

Diagrama del diseño con pretest, postest y grupos intactos



Nota: elaboración propia con base en Hernández-Sampieri y Mendoza (2018)

En este gráfico:

G<sub>1</sub> = Grupo Experimental

G<sub>2</sub> = Grupo control

M<sub>1</sub> = Medición 1 (pretest)

X = Tratamiento experimental

M<sub>2</sub> = Medición 2 (postest)

#### 3.6.2. Momentos del estudio

Como se muestra en el diseño, en el presente estudio la recolección de datos se realizó en dos momentos. El primero de ellos, se ubica antes de la administración del tratamiento experimental, de modo que se aplicó a ambos grupos la prueba de conocimientos sobre pensamiento geométrico a modo de pretest. Seguidamente, el grupo experimental participó en el tratamiento experimental, que tuvo una duración de 30 horas distribuidas en 5 semanas. Finalmente, se aplicó de nuevo la prueba de conocimientos a ambos grupos al finalizar la

administración del programa, a modo de posttest, de manera que se cuenta con dos medidas en momentos distintos.

Con base en esta característica, el diseño seguido se clasifica como longitudinal, definido por Hernández-Sampieri & Mendoza (2018) como estudios que recogen datos en diferentes momentos con la finalidad de realizar inferencias sobre la evolución del fenómeno en estudio. En lo específico, se realizó una primera medición en el posttest, luego se aplicó la intervención educativa en un periodo de 6 semanas, luego de las cuales se realizó el posttest o segunda medición del pensamiento geométrico.

### 3.6.3. Alcance del estudio

El alcance de una investigación puede estimarse, según Hernández-Sampieri y Mendoza (2018), de acuerdo al nivel de profundidad expresado en el planteamiento de la misma, por lo que proponen que, en la investigación cuantitativa, estos alcances son cuatro: exploratorio, descriptivo, correlacional y explicativo, siendo este último aquel que se dirige a encontrar las causas y explicaciones de un fenómeno independientemente de su naturaleza.

En el caso de la presente investigación, esta se corresponde con un alcance explicativo, pues no se limitó a explorar y describir el pensamiento geométrico como fenómeno de estudio, sino que buscó diseñar, aplicar y evaluar una intervención educativa basada en el origami como estrategia didáctica para su desarrollo, con base en la premisa de que las estrategias didácticas empleadas por los docentes son uno de los factores causales de las debilidades encontradas en el pensamiento geométrico de los estudiantes, por ende, su participación en la secuencia didáctica contribuye al fortalecimiento de dicho tipo de pensamiento.

## **3.7. Tratamiento experimental. Programa: Origami, un universo de posibilidades**

---

En este apartado se presenta el tratamiento experimental empleado en la investigación, que consistió en una intervención educativa basada en el uso del origami como herramienta de

apoyo al pensamiento geométrico en los estudiantes del grado tercero de etapa básica, con la que se satisface el segundo objetivo específico de esta investigación y que lleva por nombre *Origami: un universo de posibilidades*. Este programa se planteó como objetivo general desarrollar competencias del pensamiento geométrico en los estudiantes de tercer grado de la IEDAU, de Bogotá, Colombia, a través de la utilización de las técnicas del origami en el aula de matemáticas, mediante el desarrollo de sus distintos niveles, fundamentados en la teoría de Van Hiele (1999), para ello es necesario cumplir con los estadios que plantea este autor.

A saber, los niveles de razonamiento de Van Hiele (1999), representan las diferentes formas de razonamiento geométrico que se identifican en un estudiante durante su formación académica, la cual comienza en los grados de educación básica primaria, con la intuición, hasta alcanzar un pensamiento más estructurado y formal dentro de los grados de educación básica secundaria, media y superior, donde es posible acompañar al estudiante en el desarrollo de su pensamiento abstracto; por lo tanto, para esta intervención es preciso aclarar que solo se trabajó con los tres primeros niveles, de acuerdo con la etapa académica atendida.

Cabe destacar en este punto que, los descriptores de nivel corresponden con el conjunto de acciones que llevan consigo ciertas connotaciones específicas que permiten identificar el nivel de razonamiento en que se ubica un estudiante cuando realiza una actividad asociada con el contexto matemático, a la vez que facilita determinar la red de relaciones y conceptos que debe estar en capacidad de dominar.

Aclara Van Hiele (1999), que entre los niveles de razonamiento concurren algunos estados transitorios que se suscitan de un nivel a otro, razón que ha generado el establecimiento de descriptores de separación, que serán alcanzados en el nivel subsiguiente, una vez que se hayan consolidado los conceptos del nivel en el que se encuentra el estudiante. Por ello, éste debe demostrar claramente que ha superado gradualmente los criterios descritos en cada nivel de razonamiento, desde la dimensión cognitiva de su proceso escolar. Para esto, deben planificarse

las actividades direccionadas adecuadamente, con objetivos claros y acordes con los niveles, para identificarlos y continuar con el logro de un mejor razonamiento cada vez, tal como se hizo en esta intervención.

Específicamente, para esta investigación se propusieron las siguientes actividades: un cuestionario con preguntas abiertas y una entrevista semiestructurada de tipo socrática, con el diseño de descriptores para los niveles de razonamiento I, II y III, por medio de la construcción de los sólidos platónicos elaborados por los estudiantes, aplicando las técnicas del origami. Asimismo, teniendo en cuenta el grado en que se encuentra el grupo, las actividades apuntaron al fortalecimiento de los tres niveles primarios del modelo de Van Hiele (1999) como se expresó anteriormente.

Para el nivel I razonamiento, se destaca la importancia de la construcción del aprendizaje. El estudiante efectúa un reconocimiento de los elementos y nociones básicas de estudio para la comprensión de conceptos determinados, logra identificar las figuras geométricas de forma general, pero presenta dificultades para reconocer elementos, propiedades matemáticas y realizar generalizaciones entre ellas, dado que se encuentra en un estadio inicial. Igualmente, en este primer nivel se identifica el conjunto de saberes previos que requiere el estudiante para establecer la red de relaciones que le permita avanzar en los niveles de razonamiento gradualmente y poder llegar a la comprensión de la fórmula de Euler, de acuerdo con las necesidades y características por los que debe atravesar en cada uno de estos niveles.

En el nivel II, que corresponde a la fase de análisis, se focaliza la manera en la cual el aprendiz hace uso de los sólidos platónicos para identificar referencias visuales mediante las cuales pueda hacer comparaciones entre las figuras construidas desde el doblado del papel y con pitillos, para así reconocer determinadas propiedades matemáticas. En este nivel, igualmente, el estudiante percibe los objetos desde una mirada generalizada, por lo tanto, tiene dificultades al momento de establecer relaciones entre las propiedades de ciertas figuras

geométricas en dependencia con otros modelos parecidos.

Por su parte, en cuanto al nivel III relativo a relaciones, clasificaciones u ordenamiento, el estudiante logra apreciar con claridad las propiedades que tienen los objetos geométricos, haciendo uso de la observación y manipulación directa del doblado del papel para la confección de las figuras geométricas; no obstante, todavía presenta dificultades para identificar relaciones profundas entre algunas propiedades geométricas, dado el grado de separación e independencia en la que se encuentran, lo cual constituye la base de las etapas consecutivas del modelo que no se contemplan en la presente propuesta didáctica. En términos generales, se puede afirmar que los aprendices que dominen este nivel de razonamiento sean capaces de desarrollar definiciones formales acerca de los conceptos geométricos.

En relación con los tres niveles mencionados, se señalan a continuación los descriptores que fueron asumidos para la esta secuencia didáctica:

**Tabla 8.**

**Descriptores para los niveles de pensamiento geométrico**

Nivel	Descriptor
<p>Nivel I Razonamiento o reconocimiento</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Reconoce nociones básicas de la geometría euclidiana, tales como: punto, recta, segmento, recta paralela, recta perpendicular, plano, entre otros.</li> <li>• Reconoce axiomas básicos de la geometría euclidiana como el siguiente: “Por dos puntos pasa una única recta”.</li> <li>• El estudiante establece comparaciones entre una línea recta y un doblado realizado con papel.</li> <li>• Utilizando los pitillos para la elaboración de los sólidos platónicos, el estudiante: reconoce elementos básicos de los cuerpos platónicos como: caras, vértices y aristas.</li> <li>• Distingue entre una figura plana y una redonda.</li> <li>• Identifica figuras geométricas planas como triángulos, cuadriláteros y pentágonos.</li> </ul>
<p>Nivel II Análisis</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Reconoce los cinco poliedros construidos con dos tipos de material: pitillos de gaseosa y bloc iris.</li> <li>• Establece comparaciones para hallar diferencias y semejanzas entre un poliedro regular y uno irregular.</li> </ul>

Nivel	Descriptor
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identifica diagramas para desarrollar los cinco poliedros regulares.</li> <li>• Reconoce los cinco poliedros platónicos como cuerpos regulares.</li> <li>• Establece comparaciones entre las estructuras de un cuerpo platónico elaborado con pitillos y doblado del papel (origami).</li> </ul>
<p>Nivel III Relaciones, clasificaciones u ordenamiento</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Reconoce que todas las caras de un sólido platónico son polígonos regulares iguales.</li> <li>• Reconoce que en todos los vértices de un sólido platónico concurren en el mismo número de caras y aristas del objeto.</li> <li>• Afirma que todos los ángulos diedros que forman las caras de un sólido platónico entre sí son iguales.</li> <li>• Comprende el por qué son solo cinco sólidos platónicos.</li> </ul>

Nota: los descriptores fueron tomados textualmente de Blandón *et al.* (2016)

En función de lo antes expuesto, el abordaje didáctico de los contenidos está centrado en el fortalecimiento del pensamiento espacial y los sistemas geométricos (MEN, 2006) los cuales forman parte de la tipología de la subdivisión del pensamiento matemático, y concretan el estudio formal de las propiedades espaciales involucradas en la métrica, que posteriormente se convertirán en conocimientos significativos sobre la geometría, desde el particular de los teoremas euclidianos. En cuanto a su estructura, esta intervención está integrada por diversos aspectos formales que permiten al profesorado de matemáticas contar con lineamientos, guías e instrumentos para mediar los aprendizajes de geometría, a través de estrategias, actividades y recursos que faciliten la comprensión de los contenidos de forma lúdica.

Desde la perspectiva de su diseño, este programa se concibió en tres unidades de contenidos, para ser administrado en cinco semanas académicas, con actividades distribuidas en 2 bloques de 3 horas cada semana, lo que la lleva a una duración total de 30 horas. Concretamente, se incluyeron diversas estrategias y actividades centradas en el trabajo del estudiante bajo la supervisión directa del docente, entre ellas estrategias de apoyo al aprendizaje, estrategias de trabajo colaborativo, que abarcan actividades de interacción y comunicación, y estrategias de trabajo autónomo. Así mismo, se han integrado actividades de evaluación

diagnóstica, formativa y sumativa en cada unidad. Los detalles del programa, así como los planes operativos para su administración, se encuentran en el Anexo 4.

Entre otras, el *Programa Origami: un universo de posibilidades* tiene la ventaja de que puede ser replicado con otros estudiantes de tercer grado, e incluso, puede ser adaptado a los contenidos propuestos en el currículo vigente de todos los grados de primaria, pues cuenta con actividades de fácil adaptación en las que se desarrollan diversos conocimientos de índole conceptual y procedimental relacionados con el pensamiento geométrico en general. Los detalles de este programa están disponibles en el Anexo 4, y en el Anexo 5 se han incluido evidencias de su aplicación mediante un registro fotográfico.

### **3.8. Operacionalización de las variables**

---

En esta investigación se identifican dos variables, la variable independiente, Programa basado en Origami, y variable dependiente, pensamiento geométrico.

Con respecto a la variable independiente, el programa basado en origami se conceptualiza como una intervención educativa dirigida a estudiantes del tercer grado, en la que aprenden sobre el origami, cuyo objetivo es desarrollar su pensamiento geométrico a través del uso de esta técnica.

En cuanto a la variable dependiente, en esta investigación se asume que el pensamiento geométrico es un "... conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales" (MEN, 2006, 61).

Esta variable dependiente se operacionaliza en cinco dimensiones que representan niveles del pensamiento geométrico, propuestas por Van Hiele (1999): 1) Reconocimiento; 2) Análisis; 3) Relaciones, clasificación u ordenamiento; 4) Deducción formal; y 5) Rigor lógico; con sus

respectivos indicadores. En el contexto de esta investigación se midieron únicamente las tres primeras dimensiones, atendiendo a lo expuesto por Jungk (1979) quien expresa que estos niveles están relacionados con el desarrollo físico y mental de las personas, por lo tanto, son estos los que conciernen a los niños del tercer grado participantes en esta investigación, cuyas edades oscilan entre los 9 y 10 años.

Adicionalmente, se incorporan como indicadores los estándares de competencia matemática correspondientes al pensamiento espacial y sistemas geométrico propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (2006). Esta operacionalización puede verse en la Tabla 9.

**Tabla 9**

**Operacionalización de la variable**

Variable	Dimensiones (Niveles)	Indicadores	Ítems
Pensamiento geométrico	Reconocimiento (visualización)	1. Identifica la apariencia de las figuras geométricas.	1, 4
		2. Ubica objetos y figuras en el plano.	7, 10
		3. Reconoce las nociones de horizontalidad, verticalidad	13, 16
	Análisis	1. Establece diferencias y similitudes entre objetos bidimensionales y tridimensionales.	2, 9
		2. Establece conjeturas que se aproximen a las nociones de paralelismo y perpendicularidad en figuras planas.	14, 17
		3. Establece conjeturas acerca de las propiedades de las figuras planas cuando sobre ellas se ha hecho una transformación (traslación, rotación, reflexión o simetría, ampliación, reducción).	8, 11
	Relaciones, clasificación u ordenamiento (abstracción)	1. Relaciona objetos tridimensionales con sus respectivas vistas.	3, 12
		2. Vincula diseños y construcciones de cuerpos y figuras geométricas	6, 15
		3. Relaciona dirección, distancia y posición en el espacio	5, 18

*Nota:* elaboración propia a partir de las propuestas de Alfonso (2004), Iglesias y Ortiz, (2015); Ministerio de Educación Nacional (2006)

### **3.8. Análisis de datos**

---

Con base en la naturaleza cuantitativa de los datos recabados en esta investigación, se recurrió a la aplicación de técnicas estadísticas para el análisis de los mismos. Este análisis se realizó mediante el programa estadístico SPSS versión 25. Para ello los datos fueron previamente tabulados y organizados, generando las bases de datos sobre las cuales se realizaron los cálculos respectivos.

En primer lugar, se estableció el nivel de medición de la variable en estudio, en este caso el pensamiento geométrico se encuentra en el nivel de medición de intervalo, en el que se establecen distancias iguales entre los valores que asume la variable y las unidades de calificación son equivalentes en cada punto de la prueba, utiliza datos cuantitativos y permite la medición de atributos psicoeducativos, como en este caso, el pensamiento geométrico, mediante pruebas de conocimientos (Juárez et al., 2002).

En este orden de ideas, se seleccionaron los estadísticos descriptivos correspondientes a una variable de intervalo: frecuencias, porcentajes, media aritmética y desviación estándar, para conocer las características esenciales de la muestra del estudio en torno a la variable pensamiento geométrico.

Posteriormente, y considerando los objetivos formulados, se estableció la necesidad de realizar una comparación entre los grupos en estudio y una prueba de hipótesis, aplicando estadística inferencial. Para esto se utilizó la prueba t de Student para grupos independientes, pues esta es la indicada cuando la variable es de intervalo y se ha medido en dos grupos (Juárez et al., 2002).

### 3.9. Consideraciones éticas

---

Toda investigación debe regirse por principios éticos, especialmente aquella en la que participan seres humanos, más cuando estos participantes son niños y adolescentes. Al respecto, Buendía & Berrocal, (2001) plantean que la investigación enfrenta tres tipos de problemas éticos: los relacionados con los participantes, los asociados con el desarrollo del trabajo y los problemas éticos del propio investigador. En este sentido puede decirse que los problemas que se agrupan en todas esas áreas fueron considerados al inicio del estudio y, por lo tanto, fueron minimizados al tomar acciones preventivas.

Con relación al primer grupo de problemas, los relacionados con los participantes, se informó oportunamente a los padres de los estudiantes sobre el proyecto a desarrollar para solicitar su consentimiento informado para la participación de sus hijos en las actividades, tal como se evidencia en el Anexo 6. Adicionalmente, se cuidó la confidencialidad de las puntuaciones obtenidas por los estudiantes en la prueba, por lo que en el análisis de datos estas fueron codificadas sin un criterio definido que pudiera poner en evidencia su identidad; no se optó por el anonimato de las mismas a fin de contar con un registro que permitiera posteriormente, y fuera del contexto de la investigación, brindar a cada estudiante el apoyo necesario para el desarrollo y consolidación de sus competencias.

En cuanto a los problemas éticos asociados con el desarrollo del trabajo, las acciones emprendidas giraron en torno a la planificación minuciosa de cada actividad en cada fase, desde la planificación hasta la elaboración de conclusiones y recomendaciones. Cabe destacar que los resultados se han utilizado únicamente para fines académicos.

Finalmente, en lo que respecta a los problemas éticos del propio investigador citados por Buendía y Berrocal, (2001), se encuentran los resultados fraudulentos y el plagio. Cabe mencionar que en el desarrollo de esta investigación se han presentado los resultados conforme

a la recolección realizada; las técnicas empleadas para su procesamiento y análisis han sido seleccionadas por ser las idóneas con el diseño propuesto. Adicionalmente, en cada fase de esta, los capítulos redactados han sido sometidos a evaluación mediante software antiplagios.

## **CAPÍTULO IV RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN**

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos luego de aplicar los procedimientos metodológicos antes descritos. Para llegar a ello, los datos recolectados fueron previamente tabulados y organizados, luego fueron analizados aplicando las técnicas de la estadística descriptiva e inferencial descritas en el capítulo anterior, lo que permitió someter a prueba las hipótesis planteadas. En este sentido, se incluyen en los siguientes apartados los datos sociodemográficos de los participantes, así como los cuadros que resumen los resultados para cada una de las dimensiones e indicadores que conforman la variable de estudio, pensamiento geométrico.

Para comenzar, se presentan los datos sociodemográficos que caracterizan a la muestra del estudio. Esta muestra, tal como se ha precisado en el capítulo III donde se alude al método, estuvo conformada inicialmente por 55 estudiantes del tercer grado de Educación Básica Primaria, en la Institución Educativa Distrital Alemania Unificada, ubicada en Bogotá, Colombia, quienes se distribuyen en dos cursos académicos que a su vez se constituyen en grupo experimental (Sección 301) y grupo control (Sección 302). Sin embargo, la muestra se redujo por el retiro de algunos estudiantes que se fueron a otras instituciones. Adicionalmente, se eliminaron de la muestra y, por ende, del análisis de datos aquellos estudiantes que no asistieron a una o varias sesiones del programa desarrollado, por lo tanto, la muestra quedó conformada finalmente por 50 estudiantes, 25 de ellos en el grupo control y 25 en el grupo experimental. Entre sus características sociodemográficas se destaca la distribución por sexo y por edad, tal como se detalla en las Tablas 10 y 11, y se representa en las Figuras 4 y 5.

**Tabla 10**

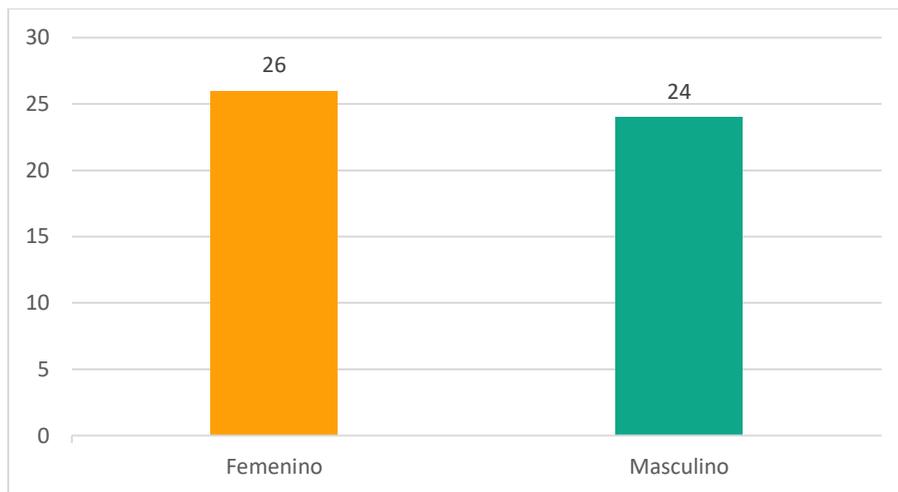
**Distribución de la muestra por sexo**

Sexo	Cantidad de estudiantes	%
Femenino	26	52
Masculino	24	48
TOTAL	50	100

*Nota:* datos recolectados mediante el instrumento de investigación

**Figura 4**

*Distribución de la muestra por sexo*



**Tabla 11**

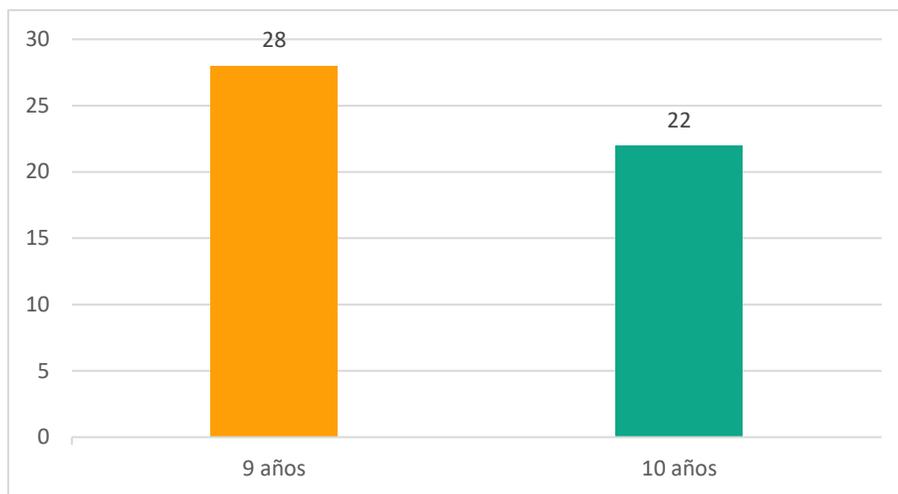
**Distribución de la muestra por edad**

Edad	Cantidad de estudiantes	%
9 años	28	56
10 años	22	44
TOTAL	51	100

*Nota:* datos recolectados mediante el instrumento de investigación

## Figura 5

*Distribución de la muestra por edad*



Como se observa en la Tabla 10, 26 estudiantes son del sexo femenino y 24 del sexo masculino, representando 52% y 48% respectivamente. En cuanto a las edades, la Tabla 11 revela que 28 estudiantes tienen 9 años, lo que equivale al 56% y el resto, 22 estudiantes que representan el 44% tienen 10 años de edad.

### 4.1. Resultados del pretest

---

A continuación, se presentan en la Tabla 11 los resultados del análisis descriptivo realizado a los datos relacionados con las dimensiones de la variable pensamiento geométrico, los cuales responden al primer objetivo específico, de corte diagnóstico, y que se dirige a describir el pensamiento geométrico en los estudiantes del grado tercero de primaria de la Institución Educativa Distrital Alemania Unificada (Bogotá D.C. – Colombia).

**Tabla 12**

*Resultados para la variable pensamiento geométrico. Grupo control vs. Grupo experimental*

*Pretest*

Dimensión	Grupo Control		Grupo Experimental	
	Promedio	Categoría	Promedio	Categoría
Reconocimiento (visualización)	3,44	Medio	3,72	Medio
Análisis	1,40	Bajo	1,24	Bajo
Relaciones, clasificación u ordenamiento (abstracción)	2,16	Medio	2,12	Medio
Promedio de la variable	7,00	Medio	7,08	Medio

*Nota: elaborado a partir de los resultados obtenidos en SPSS.*

En la Tabla 12 se observa que los estudiantes del grupo control obtuvieron un promedio de 3,44 puntos en la dimensión reconocimiento, muy cercano al promedio de 3,72 puntos obtenido por el grupo experimental, que los ubica en la categoría del nivel medio en esta dimensión. De forma similar, los resultados obtenidos en la dimensión análisis muestran que el promedio del grupo control llegó a los 1,40 puntos y para el grupo experimental 1,24 puntos, por lo que ambos grupos se ubican en un nivel bajo. Finalmente, para la dimensión relaciones, clasificación u ordenamiento, ambos grupos se ubican en la categoría medio, al alcanzar promedios de 2,16 y 2,12 puntos.

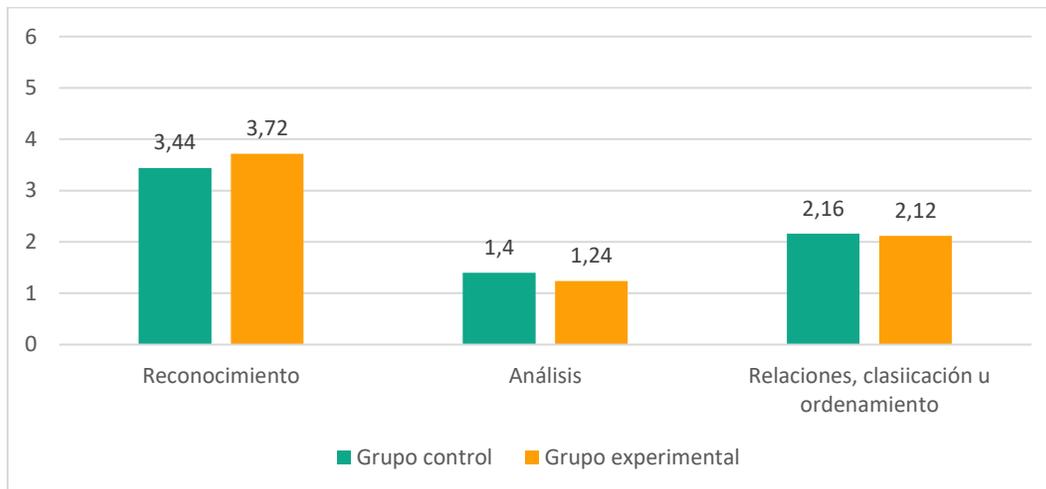
Integrando los promedios de estas tres dimensiones, se obtiene que el promedio de la dimensión pensamiento geométrico es de 7 puntos para el grupo control y 7,08 puntos para el grupo experimental, lo que los ubica en la categoría medio, es decir, los estudiantes de la muestra presentan un nivel medio en el desarrollo de su pensamiento geométrico. Esto significa que dichos estudiantes son medianamente capaces de encontrar patrones o relaciones, transformaciones, así como analizar figuras en el plano y/o espacio, para apuntar hacia el desarrollo del pensamiento visual, a la demostración del conocimiento exacto y universal

necesario, por medio de encadenamientos lógicos de proposiciones (Vásquez & Cortínez, 2021).

Estos resultados se ilustran en las Figura 6 y 7.

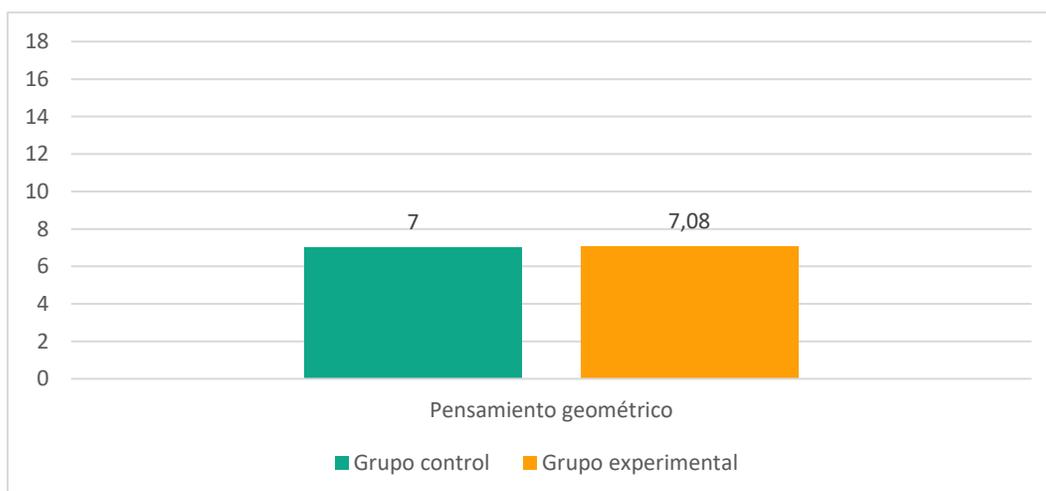
### Figura 6

*Resumen de resultados del pretest por dimensiones. Grupos control y experimental*



### Figura 7

*Resumen de resultados del pretest para la variable pensamiento geométrico. Grupos control y experimental*



Para seguir la lógica planteada en los objetivos y en el diseño metodológico de esta investigación, se requirió aplicar técnicas estadísticas para realizar la comparación entre los grupos de estudio. Con este fin, previo a la aplicación del Programa elaborado, se aplicaron pruebas de normalidad a los datos recolectados en el pretest, que permitieron establecer la homogeneidad de los grupos en estudio, como requisito para la aplicación del estadístico t de Student. Este procedimiento se efectuó mediante la fórmula de Shapiro-Wilk, cuyos resultados se muestran en la Tabla 13.

**Tabla 12**

**Pruebas de normalidad**

Grupo	Kolmogorov-Smirnov <sup>a</sup>			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl	Sig.	Estadístico	gl	Sig.
Punt.Total C	,090	25	,020	,928	25	,077
E	,155	25	,121	,933	25	,102

a. Corrección de significación de Lilliefors

*Nota:* tomado del documento de resultados del SPSS

Las pruebas de normalidad se basan en dos hipótesis:

H0: La distribución de los datos se comporta igual a una distribución normal.

H1: La distribución de los datos no se comporta igual a una distribución normal.

Es importante verificar alguna de estas hipótesis para determinar si se pueden analizar las diferencias entre los grupos mediante técnicas paramétricas o deben aplicarse técnicas no paramétricas. En este orden de ideas, en el análisis de la prueba de normalidad se utilizan los siguientes criterios:

- Si valor p sig.  $\geq 0,05$  indica que se acepta H<sub>0</sub>, la distribución de los datos se comporta igual a una distribución normal.
- Si valor p sig.  $< 0,05$  indica que se rechaza H<sub>0</sub>, la distribución de los datos no se comporta

igual a una distribución normal.

Como se observa en la Tabla 13, el valor p sig para el grupo control es de 0,077 y para el grupo experimental es de 0,102, ambos por encima de 0,05 por lo tanto, se acepta la hipótesis confirmatoria (H0), según la cual los datos obtenidos en el pretest se comportan como una distribución normal, con respecto a la variable pensamiento geométrico. En este caso, es propicio continuar con el análisis de las diferencias entre los grupos aplicando la t de Student, cuyos resultados se muestran en la Tabla 14.

**Tabla 13**

*Prueba t de Student para muestras independientes. Pretest*

	Prueba de Levene de igualdad de varianzas	prueba t para la igualdad de medias								
		F	Sig.	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Diferencia de error estándar	95% de intervalo de confianza de la diferencia	
									Inferior	Superior
Punt. Total	Se asumen varianzas iguales	2,042	,159	,152	48	,880	-,08000	,52574	-1,13707	,97707
	No se asumen varianzas iguales			,152	45,625	,880	-,08000	,52574	-1,13849	,97843

*Nota:* Tomado de los resultados de SPSS

Para analizar los resultados de la t de Student, se establecen dos hipótesis:

H0: No existen diferencias significativas entre los grupos control y experimental con respecto a la variable de estudio.

H1: Existen diferencias significativas entre los grupos control y experimental con respecto a la variable de estudio.

Estableciendo un intervalo de confianza de 95% y un nivel de significancia del 5% (0,05), se asumen los siguientes criterios:

- Si valor p sig. >0,05, indica que se acepta H0, no existen diferencias significativas entre

los grupos con respecto a la variable de estudio.

- Si valor P sig.  $\leq 0,05$ , indica que se rechaza  $H_0$ , existen diferencias significativas entre los grupos con respecto a la variable de estudio.

En el caso de la presente investigación, tal como se observa en la Tabla 14, el valor de p sig. es de 0,823, mayor que 0,05, por lo tanto, se acepta  $H_0$ , es decir que no existen diferencias significativas entre los grupos control y experimental con respecto a su pensamiento geométrico al inicio del estudio, tal como lo reportan los datos del pretest.

## 4.2. Resultados del postest

---

Corresponde ahora analizar los datos obtenidos en el postest, luego de la interacción del grupo experimental con el *Programa Origami: un universo de posibilidades*. Estos se presentan en la Tabla 15.

**Tabla 14**

*Resultados para la variable pensamiento geométrico. Grupos control y experimental. Postest*

Dimensión	Grupo Control		Grupo Experimental	
	Promedio	Categoría	Promedio	Categoría
Reconocimiento (visualización)	3,68	Medio	5,20	Alto
Análisis	1,76	Bajo	3,76	Medio
Relaciones, clasificación u ordenamiento (abstracción)	2,56	Medio	4,92	Alto
Promedio de la variable	8,00	Medio	13,88	Alto

*Nota: elaborado a partir de los resultados obtenidos en SPSS.*

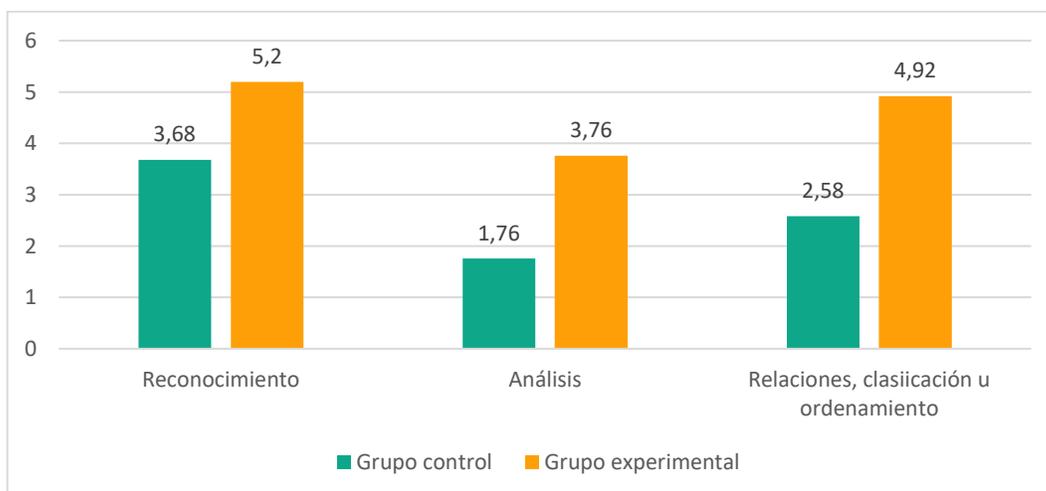
Como se muestra en la Tabla 15, en la dimensión reconocimiento, el grupo control obtuvo un promedio de 3,68 puntos, equivalente a la categoría medio, mientras que el grupo experimental obtuvo 5,20 puntos de promedio, que lo ubica en la categoría alto. En la dimensión análisis, el

promedio del grupo control fue de 1,76, categoría bajo, y el del grupo experimental 3,76, categoría medio. Por su parte, en la dimensión relaciones, clasificación u ordenamiento, los promedios fueron de 2,56 para el grupo control y 4,92 para el grupo experimental, ubicándose en las categorías medio y alto respectivamente.

Los promedios para la variable pensamiento geométrico en el postest, fueron de 8 puntos para el grupo control y 13,88 puntos para el grupo experimental, lo que ubica a los grupos en las categorías medio y alto respectivamente. Esto significa que el grupo control tiene un nivel medio en el desarrollo de su pensamiento geométrico, pero el grupo experimental alcanzó un nivel alto de desarrollo de su pensamiento geométrico luego de haber participado en el programa diseñado para tal fin. Estos resultados se visualizan gráficamente en las Figuras 8 y 9.

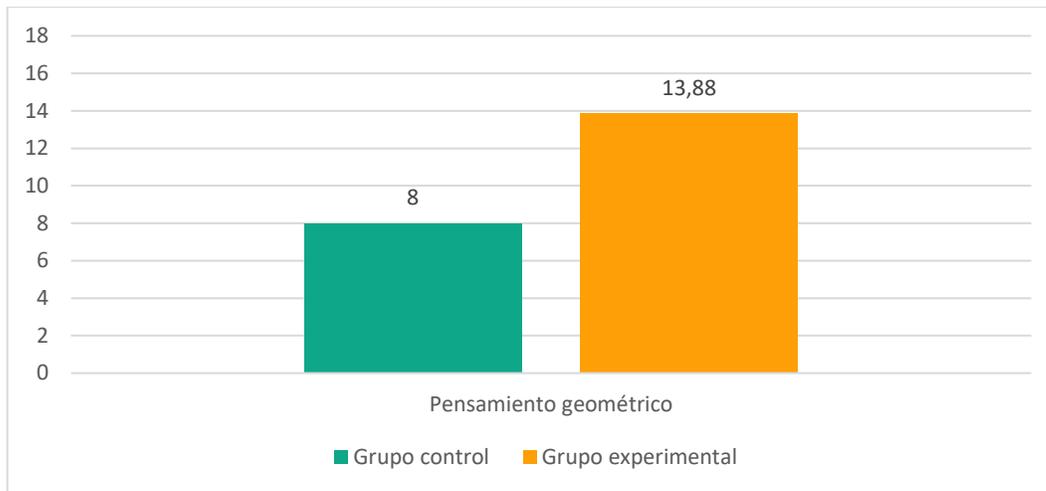
### Figura 8

*Resumen de resultados del postest por dimensiones. Grupos control y experimental*



## Figura 9

*Resumen de resultados del postest para la variable pensamiento geométrico. Grupos control y experimental*



Adicionalmente, se compararon los resultados obtenidos por el grupo experimental en ambas mediciones de la variable pensamiento geométrico, para evidenciar con mayor precisión las diferencias entre los promedios alcanzados en cada uno de los niveles de pensamiento geométrico y en la variable total en cada medición. Estos resultados se resumen en la Tabla 16.

## Tabla 15

*Resultados para la variable pensamiento geométrico. Grupo experimental. Pretest y postest*

Dimensión	Pretest		Postest	
	Promedio	Categoría	Promedio	Categoría
Reconocimiento (visualización)	3,72	Medio	5,20	Alto
Análisis	1,24	Bajo	3,76	Medio
Relaciones, clasificación u ordenamiento (abstracción)	2,12	Medio	4,92	Alto
Promedio de la variable	7,08	Medio	13,88	Alto

*Nota: elaborado a partir de los resultados obtenidos en SPSS.*

En esta Tabla 16 se muestra que los estudiantes del grupo experimental pasaron de tener 3,72 puntos en la dimensión reconocimiento (visualización) en el pretest, a un promedio de 5,20 puntos en el postest aplicado luego de su participación en el programa, lo cual evidencia un aumento de categoría de medio a alto en este nivel de pensamiento. De forma similar, el nivel de análisis, que se ubicó en la categoría bajo durante el pretest con un promedio de 1,24 puntos, alcanzó a la categoría medio con 3,76 puntos en el postest. En el nivel relaciones, clasificación u ordenamiento (abstracción), también se observa un incremento en el promedio obtenido en el postest de 4,92 puntos, con respecto al promedio de pretest que llegó a los 2,12 puntos, pasando de la categoría medio a la categoría alto.

Con relación a los promedios obtenidos por los estudiantes del grupo experimental en la variable total, se observa en la Tabla 16 un escalamiento similar tanto en el promedio como en la categoría, ya que, de un promedio de 7,08 puntos en el pretest, que los ubicó en la categoría medio, lograron en el postest un promedio de 13,88 ubicándose en la categoría alto.

Tanto en las tablas como en las figuras se observan las diferencias entre los promedios obtenidos por los grupos, no obstante, se requiere establecer que esta diferencia resulta estadísticamente significativa y que el incremento del pensamiento geométrico del grupo experimental es producto de su interacción con el origami, por ello, se aplicó nuevamente el estadístico t de Student para comparar estadísticamente la diferencia entre las medias de los grupos. Estos resultados se muestran en la Tabla 17.

**Tabla 16**

*Prueba t de Student para muestras independiente. Postest*

		Prueba de Levene de igualdad de varianzas		prueba t para la igualdad de medias						
		F	Sig.	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Diferencia de error estándar	95% de intervalo de confianza de la diferencia	
									Inferior	Superior
Punt. Total	Se asumen varianzas iguales	,025	,875	-7,125	48	,000	-5,88000	,82527	-7,53931	-4,22069
	No se asumen varianzas iguales			-7,125	47,696	,000	-5,88000	,82527	-7,53959	-4,22041

*Nota:* Tomado de los resultados de SPSS.

Asumiendo las mismas hipótesis y criterios que en el pretest, en esta Tabla 17 se observa que el valor p sig. es de 0,000, siendo menor de 0,05 por lo cual se rechaza H0 y se acepta H1, estableciendo que existen diferencias estadísticamente significativas entre los grupos control y experimental en cuanto a la variable de estudio, pensamiento geométrico, a favor del grupo experimental. Es decir, que las diferencias en las medias observadas en el postest, 8,00 puntos para el grupo control, y 13,88 para el grupo experimental, demuestran un incremento del pensamiento geométrico de los estudiantes del grupo experimental, el cual pueden atribuirse a su participación en el *Programa Origami: un universo de posibilidades*.

## **CAPÍTULO V DISCUSIÓN**

En este capítulo se integran los resultados obtenidos con los procedimientos aplicados en una discusión que se aborda con base en las teorías de sustento, en los referentes empíricos revisados y en la panorámica general del problema que se ha descrito en el planteamiento del mismo. Por ende, representa el culmen de la investigación, en el que se presenta la interpretación de dichos resultados y se destacan las implicaciones de los mismos.

En este orden de ideas, el objetivo general de esta investigación se enfocó en evaluar los efectos de un programa de origami sobre el pensamiento geométrico de los estudiantes del grado tercero de primaria en la I.E.D. Alemania Unificada. Este objetivo se sustenta en la concepción del pensamiento geométrico propuesta por MEN (2006) que afirma que se trata de diversos procesos cognitivos que permiten construir y manipular representaciones mentales de los objetos dispuestos en el espacio, así como sus relaciones y transformaciones.

Con esta definición por delante, se asumieron para esta investigación las tres primeras dimensiones del pensamiento geométrico propuestas por Van Hiele (1999), ya que estas se corresponden con el desarrollo cognitivo de la etapa vital en que se encuentran los estudiantes participantes en el estudio, que oscila entre los 9 y 10 años, y se desglosan mediante los indicadores de los estándares de competencias para el pensamiento geométrico propuestas por el MEN (2006). Estas dimensiones son: 1) Reconocimiento (visualización), 2) Análisis y 3) Relaciones clasificación u ordenamiento (abstracción).

El desarrollo de este estudio ameritó un diagnóstico inicial del pensamiento geométrico de los estudiantes del tercer grado, que se realizó mediante una prueba de conocimientos sobre geometría, a modo de pretest. A partir de estos resultados se diseñó e implementó el *Programa Origami: un universo de posibilidades*, basado en esta técnica artística antigua de plegado de papel, y finalmente, se aplicó de nuevo la prueba de

conocimientos para describir nuevamente el pensamiento geométrico de los grupos en estudio, y compararlos para establecer si existen entre ellos diferencias significativas en cuanto a su pensamiento geométrico, que puedan atribuirse a la interacción del grupo experimental con el programa implementado.

Según los resultados del pretest, ambos grupos alcanzaron promedios similares en cada una de las tres dimensiones del pensamiento geométrico evaluadas. En el caso de la dimensión Reconocimiento, los estudiantes de ambos grupos demostraron un nivel medio de sus habilidades para 1) Identificar la apariencia de las figuras geométricas; 2) Ubicar objetos y figuras en el plano; y 3) Reconocer las nociones de horizontalidad y verticalidad. Estas habilidades se enmarcan, según Van Hiele (MEN, 2006) en las acciones que ejecuta el estudiante al percibir figuras geométricas de forma global, en la que se limita a identificar la apariencia de las figuras y realizar observaciones elementales sobre estas.

Para la segunda dimensión, ambos grupos obtuvieron promedios bajos, demostrando un nivel bajo, lo que revela la necesidad de intensificar las acciones para que los estudiantes logren 1) Establecer diferencias y similitudes entre objetos dimensionales y tridimensionales; 2) Establecer conjeturas que se aproximen a las nociones de paralelismo y perpendicularidad en figuras planas; 3) Establecer conjeturas acerca de las figuras planas cuando sobre ellas se ha hecho una transformación (traslación, rotación, reflexión o simetría, ampliación, reducción). Este conjunto de habilidades es expresión de un nivel de pensamiento en el que el estudiante reconoce las partes y propiedades de las figuras, lo cual puede comprender mediante la experimentación y el trabajo práctico con las figuras (MEN, 2006).

De forma similar, para la tercera dimensión estudiada, Relaciones, ambos grupos obtuvieron promedios de nivel medio en sus habilidades para 1) Relacionar objetos tridimensionales con sus respectivas vistas; 2) vincular diseños y construcciones de

cuerpos y figuras geométricas; 3) Relacionar dirección, distancia y posición en el espacio. En el tercer nivel, el estudiante comienza a desarrollar habilidades de razonamiento matemático y a plantear deducciones con la ayuda y guía del docente, logrando comprender las propiedades de las distintas figuras mediante proposiciones lógicas y razonamientos sencillos (Iglesias & Ortiz, 2015; MEN, 2006).

Con estos resultados, se pudo diagnosticar que el pensamiento geométrico de los estudiantes del tercer grado en la I.E.D. Alemania Unificada fue de nivel medio al inicio del estudio, lo que representó una necesidad de atención desde la clase de matemáticas en este tipo de pensamiento. Esta necesidad se fundamenta en lo planteado por el MEN (2006) en los Estándares Básicos de Competencia en matemáticas, donde se señala la necesidad de desarrollar un pensamiento espacial, en el que confluyen procesos cognitivos dirigidos a construir y manipular representaciones mentales de los objetos en el espacio, sus transformaciones, relaciones, y representaciones, y que durante los primeros años de escolaridad se basa en las relaciones entre los objetos y el espacio, así como su ubicación y cómo los estudiantes se relacionan con dichos objetos en el espacio.

Por otra parte, estos resultados del pretest, que revelaron un desarrollo medio del pensamiento geométrico de los estudiantes, validan lo señalado por Therán y Oviedo (2018) sobre la necesidad de rescatar los contenidos de geometría, para mejorar el conocimiento del espacio, mientras se fortalecen los procesos de modelación en la resolución de problemas, como un aporte al pensamiento matemático en general, a la vez que enfatizan lo propuesto por el MEN (1998) en los lineamientos curriculares para el área de matemáticas, donde se indica que, desde hace algún tiempo, esta parte de los contenidos en matemáticas se ha minimizado en el currículo, a partir de la llamada matemática moderna, que va en detrimento de la geometría y el pensamiento espacial, al basarse principalmente en el álgebra.

Asimismo, estos resultados son congruentes con lo planteado por Santos (2021), quien reporta en su estudio que los resultados de la prueba Saber 2014 a nivel nacional, demuestran las falencias de los estudiantes especialmente en los indicadores del componente geométrico, mismas dificultades que identifica en los estudiantes participantes en su estudio al inicio del mismo, y argumenta como posible causa de esta situación que las estrategias tradicionales para la enseñanza de la geometría no dan los resultados esperados en las pruebas locales, nacionales e internacionales, pues no son motivadoras para los estudiantes ni les permiten expandir su creatividad mediante estrategias innovadoras.

En relación con estos resultados, Camacho y Yubrán (2020) encontraron en su estudio con docentes de matemática, la necesidad de diseñar estrategias específicas para la enseñanza de la geometría, pues las voces de estos docentes declararon que su práctica docente se limita al trabajo individualizado y tradicional. También se detectó un desconocimiento acerca de las corrientes teóricas específicas sobre la didáctica de la geometría, lo que podría estar ocasionando que el uso de estrategias poco efectivas para el aprendizaje de la geometría como parte fundamental de la matemática.

En cuanto al *Programa Origami: un universo de posibilidades*, este se diseñó sobre la base del origami como contenido, elemento motivador y atractivo para los estudiantes, que les permitió poner en marcha habilidades manuales e intelectuales, con la finalidad de que luego fueran transferidas a la identificación de elementos geométricos y a la resolución de problemas donde estos elementos estuviesen implicados. La temática del origami como contenido de base fue seleccionada tomando en cuenta su utilidad para la construcción de modelos en una, dos o tres dimensiones que representan determinados objetos disponibles en el espacio, y que permite explicar conceptos propios de la geometría, a la vez que facilita

la comprensión de los postulados de esta rama de las ciencias matemáticas (Gur y Kobak, 2017).

Esta línea de acción concuerda con la emprendida por Quispe (2022), quien diseñó una intervención basada en técnicas de origami dirigida a estudiantes del segundo grado, como una estrategia innovadora para mejorar el aprendizaje de las figuras geométricas, permitiendo al estudiante la interacción con objetos concretos y reales a través de los cuales puede experimentar, destacando como una de sus ventajas la posibilidad de desarrollar contenidos conceptuales o declarativos, y a su vez, contenidos procedimentales. En líneas generales, a través del origami se establece una relación entre la actividad manual y la intelectual que favorece el aprendizaje de la geometría.

En este orden de ideas, Cuadrillero (2021) apunta que el origami presenta algunas ventajas para el aprendizaje de los contenidos de geometría ya que, además de facilitar a los estudiantes el desarrollo de diversas habilidades manuales, también contribuye a desarrollar su pensamiento espacial, al darles la oportunidad de crear nuevas figuras que descubren mediante el uso creativo de la técnica.

Para el caso de esta investigación, la aplicación del *Programa Origami: un universo de posibilidades*, trajo como resultados un incremento en los niveles del pensamiento geométrico de los estudiantes del grupo experimental tal como se demostró en los resultados para ambos grupos durante el postest, a saber 8,00 para el grupo control y 13,88 para el grupo experimental. Al respecto, se obtuvo que el grupo control mantuvo sus puntajes en los niveles obtenidos durante el pretest, presentado promedios medios en las dimensiones Reconocimiento y Relaciones, clasificación u ordenamiento; y un promedio bajo en la dimensión de Análisis.

Por su parte, el grupo experimental, demostró mejoría en todas las dimensiones del pensamiento geométrico investigadas, obteniendo promedios altos en las dimensiones

Reconocimiento y Relaciones, clasificación u ordenamiento, y un promedio de nivel medio en la dimensión de Análisis.

Al comparar los resultados obtenidos por ambos grupos en el postest, se observan diferencias significativas entre los promedios para la variable total, puesto que el grupo control se mantuvo en un nivel medio, mientras que el grupo experimental alcanzó un nivel alto. Estas diferencias, estadísticamente significativas, pueden ser atribuidas a la participación del grupo experimental en el programa administrado, por lo que se valida el diseño del mismo desde la perspectiva del logro de los objetivos planteados, dirigidos al fortalecimiento de cada uno de los niveles propuestos por Van Hiele (1999), a los que se orienta esta investigación, y, por otra parte, poniendo de relieve una vez más la capacidad del origami como técnica artística para generar aprendizajes significativos sobre la geometría, ubicándose como una estrategia didáctica efectiva para este fin, tal como se demuestra también en los referentes empíricos citados anteriormente.

En este sentido, estos resultados son relevantes puesto que revelan que el pensamiento geométrico puede ser desarrollado a partir de estrategias innovadoras en el aula, y que es importante que estas trasciendan a la forma convencional de gestionar la clase, tal como señalan Figueroa et al. (2021) el origami se presenta como una alternativa a la metodología tradicional para enseñar geometría, y los resultados de la presente investigación son coherentes con esta postura.

Al respecto, el MEN (1998) señala que la geometría es una herramienta que facilita interpretar y entender el mundo, ya que permite la modelación y facilita el desarrollo de procesos de pensamiento de orden superior, entre ellos el pensamiento espacial y la argumentación, por tanto,

... los énfasis en el hacer matemático escolar estarían en aspectos como: el desarrollo de la percepción espacial y de las intuiciones sobre las figuras bi y tridimensionales,

la comprensión y uso de las propiedades de las figuras y las interrelaciones entre ellas así como del efecto que ejercen sobre ellas las diferentes transformaciones, el reconocimiento de propiedades, relaciones e invariantes a partir de la observación de regularidades que conduzca al establecimiento de conjeturas y generalizaciones, el análisis y resolución de situaciones problemas que propicien diferentes miradas desde lo analítico, desde lo sintético y lo transformacional (p. 17).

En líneas generales, dando respuesta a la pregunta de investigación, ¿Cuáles son los efectos de un programa de origami sobre el pensamiento geométrico de los estudiantes del tercer grado de básica primaria en la Institución Educativa Distrital Alemania Unificada?, los resultados obtenidos indican que el *Programa Origami: un universo de posibilidades* tuvo efectos positivos sobre el pensamiento geométrico de los estudiantes del grupo experimental, lo que quedó evidenciado demostrando un aprovechamiento de las actividades, al aumentar su aprendizaje y comprensión de los conceptos y elementos acerca de la geometría, lo que, a su vez, implica un incremento en su competencia matemática.

Estos hallazgos se relacionan con los encontrados por Camacho y Yubrán (2020), Rico (2018), Rodríguez y Montiel (2021), Santos (2021), Therán y Oviedo (2018), Troncoso (2018); todos ellos referenciados como antecedentes empíricos en el marco teórico, entre otros que han verificado el potencial de las estrategias didácticas organizadas en diversidad de secuencias didácticas, talleres y programas, planificadas intencionalmente para apoyar el desarrollo del pensamiento geométrico como área fundamental del pensamiento matemático.

Al efecto, dichos estudios precedentes, así como el presente, parten de las debilidades diagnosticadas en el pensamiento geométrico de los estudiantes de diversas edades, en distintos grados y niveles académicos, por lo cual es relevante su desarrollo en

la educación inicial y básica, de modo tal que dichas debilidades vayan disminuyendo a medida que los estudiantes crecen y maduran intelectualmente.

Este es un aspecto importante de la investigación, pues no solo alude al contexto académico, sino que asume el pensamiento geométrico como un proceso mental que interviene en el desarrollo integral de las personas, al proveerles de comprensión sobre relaciones espaciales que facilitan su interacción con el mundo externo, y en general el desempeño en la cotidianidad (Camacho y Yubrán, 2020). Adicionalmente, tal como afirman Proenza y Leyva (2008) es menester iniciar el desarrollo del pensamiento geométrico desde edades tempranas con base en las primeras interacciones del individuo con su ambiente, que luego permitirá ampliar su comprensión sobre los contenidos y elementos de la geometría como rama específica del conocimiento matemático.

Desde la base de los procesos del pensamiento humano, se destaca que el pensamiento geométrico es un eje fundamental del desarrollo integral, dado que proporciona esquemas mentales necesarios para establecer relaciones espaciales de acuerdo con el entorno medioambiental y apoyo al razonamiento lógico (Camacho & Yubrán, 2020), a partir de lo cual se ha venido incorporando el origami como técnica potencial en el campo de la geometría escolar. No obstante, la didáctica de estas ciencias continúa siendo motivo de interés para diversos investigadores (Quispe, 2022; Rodríguez & Montiel, 2021; Montes & Frausto, 2021; Santos, 2021; Kögce, 2020; Troncoso, 2018), quienes coinciden en la necesidad de diseñar estrategias de enseñanza versátiles, dinámicas, e interesantes para los estudiantes, que permitan mejorar el desarrollo de niveles de este tipo de pensamiento en el estudiante, a través del manejo de definiciones, técnicas y aspectos vinculados con forma, espacio y medidas; más aún durante los primeros niveles educativos (Cuadrillero, 2021).

Propiamente, la integración de elementos alternativos para la didáctica de las matemáticas ha ido variando y desprendiendo nuevos elementos a los cuales atender, llegando a incursionar en la asociación práctica de contenidos de geometría mediante la manipulación dinámica del papel, para la representación y modelado de figuras, atención a los parámetros de construcción y comprobación de cambios realizados en cada modelo (Therán & Oviedo, 2018). Desde estos argumentos, se confirman los efectos positivos que tiene el origami en la clase de geometría y la contextualización de la enseñanza para el desarrollo del pensamiento geométrico en los aprendices.

## CONCLUSIONES

Con base en los resultados obtenidos, se presentan las siguientes conclusiones:

En cuanto al primer objetivo específico, Describir el pensamiento geométrico en los estudiantes del grado tercero de primaria de la Institución Educativa Distrital Alemania Unificada (Bogotá D.C. – Colombia), se encontró que este presenta un nivel medio con tendencia a bajo, siendo las dimensiones más desarrolladas la de Reconocimiento y la de relaciones, clasificaciones u ordenaciones, en las que ambos grupos (control y experimental) obtuvieron puntajes de nivel medio, mientras que en la dimensión de Análisis el promedio de ambos grupos los ubica en un nivel bajo. Esto permite concluir que el pensamiento geométrico de los estudiantes del tercer grado al inicio de la investigación es medio y que en este predominan las habilidades de reconocimiento de los objetos en el espacio.

Con relación al segundo objetivo específico, Diseñar un programa de origami para potenciar el desarrollo del pensamiento geométrico en estudiantes del grado tercero de primaria de la Institución Educativa Distrital Alemania Unificada, de Bogotá, Colombia, este se llevó a cabo con base en el origami como estrategia, con una duración de 30 horas, administradas en cinco semanas de clase, ampliamente descrito en el capítulo III.

Respecto al tercer objetivo específico, Comparar el pensamiento geométrico de los estudiantes que interactuaron con el programa de origami con el de los estudiantes que recibieron clases tradicionales en el tercer grado de primaria de la Institución Educativa Distrital Alemania Unificada, de Bogotá, Colombia, se obtuvo que luego de la interacción del grupo experimental con el programa diseñado, su pensamiento geométrico se incrementó, mientras que los promedios obtenidos por el grupo control permanecieron en los mismos niveles evidenciados durante el pretest. Esto permite concluir que existen diferencias significativas entre los grupos en cuanto a su pensamiento geométrico, a favor

del grupo experimental, el cual demostró mayores niveles del mismo en cada una de las dimensiones evaluadas.

En general, los resultados descritos, discutidos y retomados en estas conclusiones permiten valorar que los efectos del *Programa Origami: un universo de posibilidades*, sobre el pensamiento geométrico de los estudiantes del tercer grado de la Institución Educativa Distrital Alemania Unificada, ubicada en Bogotá, Colombia, son positivos pues tienden al incremento y mejora de cada una de las dimensiones en que este se descompone. Por ello, este programa resulta ser una intervención educativa que puede replicarse en otras instituciones que identifiquen debilidades del pensamiento geométrico en sus estudiantes.

Cabe destacar que para el análisis de resultados se aplicaron técnicas estadísticas tanto descriptivas como inferenciales, de tipo paramétrico, partiendo de la premisa de la homogeneidad inicial de los grupos, que se pudo evidenciar mediante las pruebas de normalidad. Así mismo, se realizó la correspondiente prueba estadística para aceptar la hipótesis alterna y rechazar la hipótesis nula sobre la base sólida del cálculo estadístico.

Por todo lo hasta ahora expuesto, se concluye que el *Programa Origami: un universo de posibilidades*, plantea estrategias y actividades con el potencial de desarrollar el pensamiento geométrico de los estudiantes del tercer grado, pensamiento que se constituye como uno de los componentes esenciales de la competencia matemática, y que faculta a los estudiantes para establecer relaciones con el entorno y los objetos que se encuentran en este, incrementando su desarrollo intelectual en distintos sentidos.

Estos resultados son relevantes para el campo del conocimiento científico sobre las matemáticas, en el que se establece que la geometría facilita la resolución de problemas en diversidad de contextos y situaciones de la vida diaria, por esta razón reviste una importancia especial su aprendizaje y entendimiento, y así se ha entendido a nivel mundial,

lo que se refleja en su inclusión como indicador de medición de la competencia matemática de los estudiantes en diversos niveles educativos a través de las pruebas internacionales.

En este sentido, la geometría como ciencia multidimensional, que presenta factores instrumentales y teóricos-abstractos, debería tener un lugar preeminente en los currículos escolares, especialmente en las primeras etapas de escolaridad, pudiendo dotar al aprendiz de herramientas intelectuales y operativas que le faciliten la integración de otros conocimientos afines a esta, entre ellos las artes, la geografía, la astronomía, la arquitectura. Desde la propia praxis educativa se extraña en la Educación Básica Primaria el estudio a mayor profundidad de la geometría como ciencia matemática clave para el desarrollo de ciertas habilidades básicas que requiere el estudiante para su óptimo desempeño académico en niveles educativos más avanzados.

En torno a estas ideas, la enseñanza de la geometría puede partir de un enfoque en el que los estudiantes se aproximen a este conocimiento a través de los procesos perceptivos, dando énfasis a los apoyos visuales, ya que los ejemplos contribuyen a fijar las imágenes mentales pertinentes en la construcción del conocimiento geométrico y tienen un impacto positivo en la memoria a largo plazo. En el caso de la presente investigación, el apoyo visual seleccionado es el origami, técnica antigua de plegado de papel, que además de estimular imágenes mentales, ayuda al estudiante a seguir el proceso de construcción de los objetos geométricos mediante los diferentes pasos de plegado.

Adicionalmente, la manipulación del papel, como material de trabajo, permite al estudiante tener un contacto directo con el objeto o figura que está creando, usando la transferencia de las instrucciones recibidas a la construcción de la figura como tal, lo que incide también en el desarrollo de su pensamiento geométrico al ser capaz de captar la forma adecuada de hacer el plegado para una construcción específica.

Otra arista importante en esta investigación es el empleo de una metodología activa para el desarrollo del pensamiento geométrico, es decir, aquella en la que prevalece la actividad del alumno. Las actividades del programa facilitan que el estudiante construya su propio aprendizaje desde la identificación de sus aciertos y errores en la manipulación del papel de construcción.

Desde esta perspectiva, lo primordial es que el estudiante participe activamente, desde su intelecto y desde sus habilidades manuales en la elaboración de las figuras de origami, pero también de los conceptos y propiedades relacionadas con estas, las cuales van formando una representación interna o mental de dichos contenidos. Se trata de una elaboración mental desde la intuición, tal como señalan las teorías sobre el pensamiento geométrico acerca de cómo este se desarrolla durante la infancia, en la cual se privilegian, especialmente para los estudiantes de primaria, las relaciones espaciales y la interpretación de los objetos.

En suma, el trabajo realizado desde la didáctica para el aprendizaje y el desarrollo del pensamiento geométrico, enmarcado en esta investigación, ha sido satisfactorio pues ha permitido, en primer lugar, abordar un problema acuciante relacionado con las debilidades manifestadas por los estudiantes en competencias matemáticas, que si bien no se abordaron en su totalidad, sí se hizo de forma más específica en uno de sus componentes como es el pensamiento geométrico.

En segundo lugar, este trabajo de campo permitió incorporar estrategias novedosas para los estudiantes que estimulan su participación activa en la clase de matemáticas, al ofrecerles la oportunidad de manipular materiales para construir cuerpos geométricos, generando un acercamiento que impacta notoriamente en la actitud de los estudiantes hacia la matemática en general, manifestando avidez y expectativa por las próximas actividades, lo que obliga a buscar estrategias similares para el desarrollo del resto de los pensamientos

que configuran la competencia matemática, entre ellos el numérico, el métrico o de medida, el aleatorio o probabilístico, y el variacional.

Por todo lo antes expuesto, los resultados encontrados en esta investigación pueden ser empleados como punto de partida para futuras revisiones y contrastaciones del pensamiento geométrico de los estudiantes que han participado en la misma, a la vez que se convierten en referencia para contrastar los resultados de otras investigaciones sobre esta variable de estudio a nivel local, nacional e internacional.

Al mismo tiempo, la prueba de conocimientos construida y validada para este estudio, es un aporte al avance del estudio del pensamiento geométrico, especialmente para aquellas investigaciones que se realicen en el contexto nacional, pues esta se diseñó sobre la base de los indicadores propuestos para esta competencia por el MEN como autoridad educativa de Colombia, lo cual permite replicar el estudio a nivel de diagnóstico.

De igual forma, el programa diseñado, administrado y evaluado en el transcurso de esta investigación representa un aporte para el avance en el estudio del pensamiento geométrico, pues es susceptible de ser aplicado a nivel institucional con los estudiantes del tercer grado, pues ha demostrado efectos positivos que tienden al incremento de los niveles de pensamiento geométrico de los estudiantes, también podría ser empleado con estudiantes de toda la Educación Básica Primaria si se realizan las adecuaciones curriculares pertinentes, atendiendo los indicadores de las competencias del pensamiento geométrico propuestas por el MEN (2006).

Adicionalmente, puede ser aprovechado en otras instituciones donde se hayan diagnosticado dificultades de los estudiantes en cuanto a su pensamiento geométrico, que, tal como se ha evidenciado mediante los referentes empíricos, suele ser un problema en el ámbito nacional, latinoamericano e incluso mundial, que afecta a los aprendices de los niveles básicos de los diferentes sistemas educativos, pero que a largo plazo, afecta el

pensamiento general de las personas, toda vez que la geometría es una ciencia de corte instrumental que permite al ser humano comprender el mundo que le rodea y relacionarse con él.

Los hallazgos de esta investigación tienen implicaciones importantes para el aula de matemáticas, ya que al dar a la geometría y al pensamiento geométrico su justo lugar dentro de la clase de matemáticas, se expande su pensamiento y se facilita la construcción de estructuras mentales que le permiten al estudiante comprender mejor el mundo que le rodea en función de los objetos presentes en él y su relación con ellos. Actividades tan cotidianas en la actualidad, como, por ejemplo, utilizar una ubicación por geolocalización para llegar a un lugar, distribuir muebles en un espacio, estimar distancias entre dos puntos, entre muchos otros ejemplos, requieren de las habilidades del pensamiento geométrico. Esto representa a su vez, un aporte a la sociedad, pues se trata de formar ciudadanos integrales que sean capaces de resolver diversidad de problemas en sus distintos contextos de desempeño.

Un punto de valor de esta investigación es que puede inspirar la revisión y evaluación, desde la investigación en el aula, del resto de los tipos de pensamientos contemplados en el marco de los estándares de competencias básicas en matemáticas de Colombia, que permitiría el diseño curricular contextualizado a los intereses y necesidades de los estudiantes, representando una perspectiva de investigación. Igualmente, podrían realizarse estudios longitudinales sobre la misma variable de pensamiento geométrico con los mismos grupos de estudiantes y con otras estrategias, que podrían incluir el uso de herramientas tecnológicas, de tal forma que se puedan generar productos educativos innovadores para la atención de estos contenidos dentro y fuera del aula.

Para cerrar estas conclusiones, se hace referencia a las fortalezas, oportunidades, debilidades y amenazas propias de esta investigación. En cuanto al primer factor, las

fortalezas, puede decirse que desde el principio se estableció la problemática a intervenir gracias a la experiencia docente que tiene el investigador, lo que permitió dar forma al proyecto de tesis doctoral e ir integrando cada uno de sus elementos de forma coherente y cohesiva, lo que finalmente dio lugar a la consolidación del trabajo realizado. Por su parte, las oportunidades están representadas en la posibilidad de trabajar con el grupo de estudiantes, quienes se constituyeron en el grupo experimental de la investigación, facilitando una observación directa del proceso desde el diagnóstico hasta la evaluación de los efectos del programa. También resultó ser una oportunidad el hecho de poder intervenir la problemática específica observada en la institución educativa, lo que redundó en mejor desempeño de estos estudiantes.

Con relación a las debilidades, éstas podrían centrarse en el diseño de la investigación, que, al involucrar a un grupo como control, no les permitió aprovechar las ventajas del programa diseñado, no obstante, es factible su aplicación con los grupos que no interactuaron con este, pues puede aplicarse posteriormente sin mayores inconvenientes como parte del área de matemáticas. Por último, la principal amenaza de esta investigación la constituyó el confinamiento por la pandemia del COVID 19, que puso en riesgo el desarrollo de las actividades del programa, retrasando su inicio.

## REFERENCIAS

- Aguirre, B. (2017). Origami modular y el aprendizaje de geometría en educación secundaria. En FESPM, Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (Ed.), *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 607-621). FESPM. <http://funes.uniandes.edu.co/21978/1/Aguirre2017Origami.pdf>
- Alfonso, M. (2004). Sobre los niveles de pensamiento geométrico de Van Hiele y la formación de profesores en activo. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, (58), 2-35. <http://www.sinewton.org/numeros/>
- Amaya, T. & Gulfo, J. (2009). El origami, una estrategia para la enseñanza de la geometría. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 895-901). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C. <http://funes.uniandes.edu.co/4919/1/AmayaElorigamiAlme2009.pdf>
- Amaya, T. & Gulfo, J. (2010). De lo lúdico del origami al trabajo con funciones. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 525-533): Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. <http://funes.uniandes.edu.co/4631/1/AmayaDelol%C3%BAdicoALME2010.pdf>
- Antúnez, G., Villagra, M., & Antúnez, A. (2017). El origami como recurso didáctico de la enseñanza de la geometría con poliedros: una propuesta didáctica. En FISEM, Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (Ed.), *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 98-106). FESPM. <http://funes.uniandes.edu.co/18432/1/Antunez2017El.pdf>
- Barrera, F. & Reyes, A. (2015). La teoría de Van Hiele: Niveles de pensamiento Geométrico. *Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI*, 3(5). <https://doi.org/10.29057/icbi.v3i5.554>
- Benítez, N. (2007). El cuento como contexto para explorar la geometría con el Origami. En C. Luque (Ed.), *Memorias XVII Encuentro de Geometría y V encuentro de Aritmética*

- (pp. 489-494). Universidad Pedagógica Nacional.  
<http://funes.uniandes.edu.co/5763/1/Ben%C3%ADtezElcuentoGeometr%C3%ADa2007.PDF>
- Bern, M., & Hayes, B. (1996). The complexity of flat origami, En SODA (Ed.), 7<sup>th</sup> Annual ACM-IAM Symposium on Discrete Algorithms (pp. 175-183).  
<http://graphics8.nytimes.com/packages/blogs/images/BernHayes-1.origami.SODA96.pdf>
- Berthélot, R. & Salin M. (1994). L'enseignement de la géométrie à l'école primaire, Grand N, (53), 39-56. <http://did-asp.ti-edu.ch/~dm/ForBase/MET1/2002/10aLezione/materiali/BerthelotSalin2.html>
- Blanco, C. & Otero, T. (2005). Geometría con papel (papiroflexia matemática). *SCTM05 Sociedad, Ciencia, Tecnología y Matemáticas*, 1-11. <https://docplayer.es/7016441-Geometria-con-papel-papiroflexia-matematica.html>
- Blanco, H. & Crespo, C. (2007). Representaciones geométricas y argumentaciones en el aula de matemática. *Premisa*, 32, 15-23.  
<http://funes.uniandes.edu.co/23090/1/Blanco2007Representaciones.pdf>
- Blanco, L., Caballero, A., Piedehierro, A., Guerrero, E., & Gómez, R. (2010). El domino afectivo en la Enseñanza/Aprendizaje de las Matemáticas. Una revisión de investigaciones locales. *Campo Abierto*, 29(1), 15-33.  
<https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/3420342.pdf>
- Balndón, E., Gulfo, J. & Marín, W. (2016). Los sólidos platónicos en origami para la comprensión de la fórmula de Euler en el contexto de Van Hiele. [Tesis de maestría, Universidad Pontificia Bolivariana].  
<https://repository.upb.edu.co/bitstream/handle/20.500.11912/2591/Trabajo%20de%20Grado->

[Erlin%20Bland%c3%b3n%2c%20Joel%20Gulfo%2c%20Wilson%20Mar%c3%adn.pdf?isAllowed=y&sequence=1](#)

Bolaño, O. (2020). El constructivismo: modelo pedagógico para la enseñanza de las matemáticas. *Revista Educare*, 24(3), 488-502. <https://revistas.investigacion-upelipb.com/index.php/educare/article/view/1413/1359>

Bridget L., Neyrinck, M., & Szalay, A. (2012). Origami: delineating halos using phase-space folds. *The Astrophysical Journal*, 754(126), 1-10. <http://dx.doi.org/10.1088/0004-637X/754/2/126>

Budinski, N., Lavicza, Z., Fenyvesi, K., & Milinković, D. (2020). Developing Primary School Students' Formal Geometric Definitions Knowledge by Connecting Origami and Technology. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 15(2), em0569. <https://doi.org/10.29333/iejme/6266>

Budinski, N., Lavicza Z. & Fenyvesi, K. (2018). Ideas for using GeoGebra and Origami in Teaching Regular Polyhedrons Lessons. *K-12 STEM Education*, 4(1), 297-303. <https://www.learntechlib.org/p/209555/>

Buendía, L., & Berrocal, E. (2001). La ética de la investigación educativa. *Agora digital*, 1. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=963248>

Camacho, J. & Yubrán, N. (2020). *Trabajo cooperativo como estrategia docente para desarrollar el pensamiento geométrico en el nivel básica primaria* [Tesis de Maestría, Corporación Universidad de la Costa] <https://hdl.handle.net/11323/8031>

Cañadas, M., Durán, F., Gallardo, S., Martínez, M., Peñas, M., & Villegas, J. (2003). Geometría con papel. En C. Duque, L. Balbuena, J. Méndez, D. de la Coba, & J. García. (Eds.), *XI Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas* (pp. 843-848). Consejería de Educación, Cultura y Deportes del Gobierno de Canarias. <http://funes.uniandes.edu.co/273/1/CannadasM03-2780.PDF>

- Carretero, M. (2021). *Constructivismo y Educación*. Tilde Editora.
- Castro, C. (2021). *El rendimiento de Colombia en matemáticas con respecto a las Pruebas PISA desde 2006 hasta 2018* (Monografía). Universidad Nacional Abierta a Distancia <https://repository.unad.edu.co/handle/10596/41915>
- Cerda, G., Pérez, C., Casas, J., & Ortega, R. (2017). Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. La necesidad de un análisis multidisciplinar. *Psychology, Society & Education*, 9(1), 1-10. <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/6360203.pdf>
- Corrales, F. & Rojas, M. (2021). Origami, estrategia didáctica para mejorar la enseñanza de la geometría. *Revista de Investigación Científica y Tecnológica*, 5(1), 4-18.
- Congreso de la República de Colombia (8 de febrero de 1994). Ley General de Educación. [https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-85906\\_archivo\\_pdf.pdf](https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-85906_archivo_pdf.pdf)
- Cuadrillero, D. (2021). *Geometría, origami y creatividad en el aula de primaria* [Tesis de grado, Universidad de Valladolid] <https://uvadoc.uva.es/handle/10324/49138>
- Dal Maso, M. (2007). Dificultades en las demostraciones en geometría. *Premisa*, 35, 26-36. <http://funes.uniandes.edu.co/23062/1/DalMaso2007Dificultades.pdf>
- Demaine, E. & O'Rourke, J. (2007). *Geometric folding algorithms: Linkages, origami, polyhedral*. Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.
- Dias, C. De F., Vebber, G., & Fronza, J. (2019). Experimentação do origami no ensino da geometria. *REMAT: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves*, 5(2), 108–122. <https://doi.org/10.35819/remat2019v5i2id3392>
- Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of representation and specific processes. En: R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematical education* (pp. 142-157). Springer.

- Figuerola, A., Uribe, N., & Uribe, N.S. (2021). Uso de la técnica Origami para generar procesos de comprensión y divulgación matemática. *Revista MICA*, 3(6), 1-10. <http://mica.tecnocientifica.com.mx/index.php/mica/article/view/36/17>
- Fonseca, J. & Gamboa, M. (2010). La enseñanza de la Geometría asistida por computadoras: una nueva realidad en la Secundaria Básica. *Didasc@lia: Didáctica y Educación*, 1(3), 47-62. <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/4227286.pdf>
- Gagatsis, A. (2021). Explorando el rol de las figuras geométricas en el pensamiento geométrico. *Didáctica de la matemática. Una mirada internacional, empírica y teórica*, 231-248. [https://www.researchgate.net/profile/Athanasios-Gagatsis/publication/348555482\\_Explorando\\_el\\_rol\\_de\\_las\\_figuras\\_geometricas\\_en\\_el\\_pensamiento\\_geometrico/links/6003f280a6fdccdc85c44a4/Explorando-el-rol-de-las-figuras-geometricas-en-el-pensamiento-geometrico.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Athanasios-Gagatsis/publication/348555482_Explorando_el_rol_de_las_figuras_geometricas_en_el_pensamiento_geometrico/links/6003f280a6fdccdc85c44a4/Explorando-el-rol-de-las-figuras-geometricas-en-el-pensamiento-geometrico.pdf)
- Gallardo, H. & Vergel, M. (2004). Hacia una propuesta para el aprendizaje de la geometría. En L. Díaz (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 708-713). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. <http://funes.uniandes.edu.co/6409/1/GallardoHaciaAlme2004.pdf>
- Gamboa-Araya, R. & Vargas-Vargas, G. (2013). El Modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Uniciencia*, 27(1), 74-94. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=475947762005>
- García, J. (1980). *Enciclopedia de la Educación. Didáctica de las ciencias matemáticas*. Ediciones Nauta S.A.
- García, J., González, M., & Ballesteros, B. (2001). *Introducción a la investigación en educación*. Universidad Nacional de Educación a Distancia UNED.
- García, J., González, M., & Ballesteros, B. (2001). *Introducción a la investigación en educación*. Universidad Nacional de Educación a Distancia UNED.

- Godino, J. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 8(11), 111-132.  
<https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/14720/13965>
- Gómez, F. (2019). El desarrollo de competencias matemáticas en la institución educativa Pedro Vicente Abadía de Guacarí, Colombia. *Revista Universidad y Sociedad*, 11(1), 162-171.  
[http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S2218-36202019000100162&lng=es&tlng=es](http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2218-36202019000100162&lng=es&tlng=es).
- Guerrero, M. (2014). *Metodologías activas y aprendizaje por descubrimiento. Las TIC y la educación*. Mardapal Interactive Media, S.L.
- Hernández-Sampieri, R., & Mendoza, C. (2018). *Metodología de la investigación. Las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta*. Mc Graw Hill Education.
- Hurtado, J. (2010). *Metodología de la investigación. Guía para la comprensión holística de la ciencia* (Cuarta edición). Quirón Ediciones.
- Iglesias, M. & Ortiz, J. (2015). La investigación en pensamiento geométrico y didáctica de la geometría. En J. Ortiz & M. Iglesias (Eds.), *Investigaciones en educación matemática. Aportes desde una unidad de investigación* (pp. 207-224). Universidad de Carabobo. <http://riuc.bc.uc.edu.ve/handle/123456789/2749>
- Instituto Colombiano para la Evaluación de la Calidad de la Educación (2013). *Lineamientos para las aplicaciones muestral y censal 2013. Pruebas SABER 3°, 5° y 9°*. Ministerio de Educación Nacional.
- Instituto Colombiano para la Evaluación de la Calidad de la Educación. (2015). *Ejemplos de preguntas SABER 3° Matemáticas. Cuadernillo de preguntas*. Ministerio de Educación Nacional.

- Jiménez, A. & Gutiérrez, A. (2017). Realidades escolares en las clases de matemáticas. *Revista Educación Matemática*, 29(3), 109-129. <http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v29n3/1665-5826-ed-29-03-109.pdf>
- Juárez, F., Villatoro, J., & López, E. (2002). *Apuntes de estadística inferencial*. Instituto Nacional de Psiquiatría Ramón de la Fuente.
- Jungk, W. (1979). *Conferencias sobre Metodología de la enseñanza de la Matemática*. Editorial Pueblo y Educación.
- Kögce, D. (2020). Use of Origami in Mathematics Teaching: An Exemplary Activity. *Asian Journal of Education and Training*, 6(2), 284-296. <https://doi.org/10.20448/journal.522.2020.62.284.296>
- Lang, R. (2010). *Origami and geometric constructions*. Self-Published.
- Lang, R. (Ed.). (2009). *Origami 4. Fourth International Meeting of Origami, Science, Mathematics, and Education*. CRC Press.
- Lumbreras, J., Hernández, J., & Machucho-Cadena, R. (2021). Metodología que guía la implementación de un sistema de gestión de conocimiento sobre el dominio de las matemáticas. *Revista Dilemas Contemporáneos: Educación, Política y Valores*, (9), 1-16. <https://doi.org/10.46377/dilemas.v9i.2924>
- Macías, D. (2007). Las nuevas tecnologías y el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación*, 42(4), 2.
- Martínez-Bustos, P., Niebles-Núñez, W., & Niebles-Núñez, L. (2020). Competencias matemáticas como factor de éxito en la prueba pro en universidades de Barranquilla, Colombia. *Educación y Humanismo*, 22(38), 1-16. <https://doi.org/10.17081/eduhum.22.38.3590>

- Mejía, H. & Prada, A. (2008). El origami como recurso didáctico para la enseñanza de la geometría. 9° *Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*. FUNES. <http://funes.uniandes.edu.co/992/1/31Taller.pdf>
- Ministerio de Educación Nacional (1998). Competencias Básicas en Matemáticas. Serie lineamientos curriculares.
- Ministerio de Educación Nacional (2004). ICFES Mejor Saber, Aplicación Matemática.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden*. Ministerio de Educación Nacional.
- Montes, F. & Frausto, M. (2021). Origami, estrategia didáctica para mejorar la enseñanza de la geometría. *Revista de Investigación Científica y Tecnológica*, 5(1), 4-18. [https://doi.org/10.36003/Rev.investig.cient.tecnol.V5N1\(2021\)1](https://doi.org/10.36003/Rev.investig.cient.tecnol.V5N1(2021)1)
- Morales, W. (2019). *Origami: un acercamiento a la geometría* [Tesis de grado, Universidad de Cundinamarca]. <http://hdl.handle.net/20.500.12558/1804>
- Mullis, I., Martin, M., Foy, P., & Hooper, M. (2016). TIMSS 2015. *International Results in Mathematics*. <http://timssandpirls.bc.edu/timss2015/international-results/>
- Ndubisi, E. & Arokoyu, A.A. (2022). Origami-Based Instruction and Junior Secondary School Students' Academic Performance in Mathematics in Rivers State. *IRE Iconic Research and Engineering Journals*, 5(8), 45-51. <https://irejournals.com/formatedpaper/1703192.pdf>
- Nieto, L. B., Carrasco, A. C., Piedehierro, A., Barona, E. G., & del Amo, R. G. (2010). El Dominio afectivo en la Enseñanza/Aprendizaje de las Matemáticas. Una revisión de investigaciones locales. *Campo Abierto. Revista de Educación*, 29(1), 13-31. <https://tejuelo.unex.es/revistas/index.php/campoabierto/article/view/1879>

- Nunda, F., Gamboa, M., & Zaldívar, L. (2017). Estrategia didáctica para el desarrollo del pensamiento geométrico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática en la enseñanza primaria angoleña. *UNESUM-Ciencias. Revista Científica Multidisciplinaria*, 1(1), 75-88. <https://doi.org/10.47230/unesum-ciencias.v1.n1.2017.11>
- Ñaupas, H. (2018). Capítulo III. La investigación científica. En R. Ñaupas; M. Valdivia; J. Palacios; & H. Romero. *Metodología de la Investigación cuantitativa, cualitativa y redacción de la tesis* (5<sup>ta</sup> ed., pp. 123-168). Ediciones de la U.
- Ortiz, W., Enrique, F., & García, J. (2018). Preexperimental para constatar cambios al aplicar un resultado científico. Ejemplo práctico de una metodología para mejorar el desarrollo de habilidades del pensamiento Geométrico Espacial. *Opuntia Brava*, 10(3), 329-346. <http://opuntiabrava.ult.edu.cu/index.php/opuntiabrava/article/view/563>
- Pellerey, M. (1992). Su alcune dimensioni morali dell'azione di insegnamento. *Orientamenti Pedagogici*, 39, 743-756.
- Pereira, G. & Dos Santos, J. (2006). O Origami como Ferramenta de Apoio ao Ensino de Geometria. *Revista Fafibe Online*, 1-5. <https://www.unifafibe.com.br/revistasonline/arquivos/revistafafibeonline/sumario/10/19042010094856.pdf>
- Pivaral, J. (2018). Geometría en papel. En C. Fuentes; D. Yojcom & J. Pivaral (Eds.), *Memoria del I Congreso Interuniversitario de Matemática Educativa CUNOC – UVG*. (pp. 64-65). Universidad del Valle de Guatemala. <http://funes.uniandes.edu.co/22388/1/Aronny2018Geometria.pdf>
- Polanía-Sagra, C. & Sánchez-Zuleta, C. (2007). *Un acercamiento al pensamiento geométrico*. Sello Editorial Universidad de Medellín.

- Proenza, Y. (2002). *Modelo didáctico para el aprendizaje de los conceptos y procedimientos geométricos en la escuela primaria* [Tesis Doctoral, Instituto Superior Pedagógico "José de la Luz y Caballero"].
- Proenza-Garrido, Y. & Leyva-Leyva, J. (2008). Aprendizaje desarrollador en la matemática: estimulación del pensamiento geométrico en escolares primarios. *Revista Iberoamericana de Educación*, (48), 1-15.  
<https://rieoei.org/historico/expe/2235Garrido-Maq.pdf>
- Quispe, A. (2022). El origami para la enseñanza y aprendizaje de las figuras y elementos geométricos en niños de tercer ciclo. *Revista Latinoamericana Ogmios*, 2(3), 52-63.  
<https://doi.org/10.53595/rlo.v2.i3.023>
- Rebollo, M. & Rodríguez, A. (2006). Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Neurológica*, 42, s135-s138.
- Rey, J. (2004). Dificultades conceptuales generadas por los prototipos geométricos o cuando los modelos ayudan, pero no tanto. *Premisa*, 22, 3-12.  
<http://funes.uniandes.edu.co/23138/1/Rey2004Dificultades.pdf>
- Reyes, C. (s.f.). Origami. Herramienta didáctica para la enseñanza de la Geometría. *I Foro Internacional de Matemáticas*. Universidad Sur Colombiana. Neiva.
- Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick; L. Rico; & P. Gómez (Eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). Una Empresa Docente. <http://funes.uniandes.edu.co/486/1/RicoL95-100.PDF>
- Rico, L. (2018). Fortalecimiento del pensamiento geométrico, en los estudiantes de noveno 01 de la sede Monseñor Rafael Afanador y Cadena de la Institución Educativa Bethlemitas Brighton de Pamplona. *Revista Distancia al Día*, 2-10.  
<http://hdl.handle.net/20.500.12749/2623>

- Roca, M. (2014). *Dificultades de aprendizaje de la geometría por parte de alumnos del primer ciclo de la ESO*. [Trabajo de Fin de Máster, Universidad Politécnica de Cataluña] <http://hdl.handle.net/2099.1/23570>
- Rodríguez, M. & Montiel, G. (2021). Pensamiento geométrico: una experiencia de trabajo con profesores de matemáticas de secundaria. SAHUARUS. *Revista Electrónica de Matemáticas*, 5(1). <https://doi.org/10.36788/sah.v5i1.108>
- Royo, J. (2002). Matemáticas y papiroflexia. *Sigma*, 21, 174-192.
- Ruiz, C. (2013). *Instrumentos y técnicas de investigación educativa. Un enfoque cuantitativo y cualitativo para la recolección de datos* (Tercera). DANAGA.
- Sáenz-Mass, E., Patiño-Garcés, M., & Robles-González, J. (2017). Desarrollo de las competencias matemáticas en el pensamiento geométrico, a través del método heurístico de Polya, *Panorama*, 11(21), 55-68. <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/6297711.pdf>
- Santos, M. (2021). Aplicación de herramientas de aprendizaje en ambientes virtuales para fortalecer el pensamiento geométrico en estudiantes de primaria de Barrancabermeja, Colombia-2019 [Tesis Doctoral, Universidad Privada Norbert Wiener] <http://repositorio.uwiener.edu.pe/handle/123456789/4972>
- Scaglia, S. & Moriena, S. (2005). Prototipos y estereotipos en geometría. *Educación Matemática*, 17(3), 105-120. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40517306>
- Sinclair, N. & Moss, J. (2012). The more it changes, the more it becomes the same: The development of the routine of shape identification in dynamic geometry environment. *International Journal of Educational Research*, 51, 28-44.
- Therán, E. & Oviedo, E. (2018). Desarrollo del pensamiento geométrico a partir del uso de estrategias didácticas soportadas en herramientas computacionales y el modelo Van Hiele. *Assensus*, 3(4), 49-59. <https://doi.org/10.21897/assensus.1835>

- Tigse, C. (2019). El constructivismo, según bases teóricas de César Coll. *Revista Andina de Educación*, 2(1), 25-28.  
<https://revistas.uasb.edu.ec/index.php/ree/article/view/659/635>
- Tobón S. (2013). Formación integral y competencias. Pensamiento complejo, currículo, didáctica y evaluación. ECOE Ediciones.
- Troncoso M.I. (2018). Los mandalas y el pensamiento espacial y geométrico en el pre-escolar. *Revista REDIPE*, 7(4), 99-106. Recuperado de <https://revista.redipe.org/index.php/1/article/view/486>
- Turpo, G. & Valdivia, V. (2021). Aplicación de la técnica del origami en el desarrollo de la geometría en los estudiantes de primer grado de primaria de la Institución Educativa World School, Arequipa-2020 [Tesis de grado, Universidad Católica de Santa María] <http://tesis.ucsm.edu.pe/repositorio/handle/UCSM/10800>
- UNESCO (1986). *La geometría en las escuelas. Estudios en Educación Matemática*. Robert Florris.
- Urquina, H. (Ed.). (2004). *Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales*. Ministerio de Educación Nacional, Enlace Editores.
- Valencia, A. (2013). Prácticas discursivas y recursos pedagógicos en clases de geometría en la educación básica: el caso del origami. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 275-282). Universidad Pedagógica Nacional.  
<http://funes.uniandes.edu.co/3772/1/ValenciaPr%C3%A1cticasGeometria2013.pdf>
- Van Hiele, P.M. (1986). *Structure and insight*. Academic Press.
- Van Hiele, P.M. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching Children Mathematics*, 5(6), 310-316. [https://www.numbersense.co.za/wp-content/uploads/2020/07/Van-Hiele\\_learning-through-play.pdf](https://www.numbersense.co.za/wp-content/uploads/2020/07/Van-Hiele_learning-through-play.pdf)

- Vásquez, J. & Cortínez, C. (2021). *Los Sólidos Platónicos, una Estrategia Didáctica para el Desarrollo de Habilidades en el Pensamiento Geométrico-Métrico*. [Tesis de grado, Universidad Cooperativa de Colombia]  
[https://repository.ucc.edu.co/bitstream/20.500.12494/34899/4/2021\\_solidos\\_platonicos\\_estrategia.pdf](https://repository.ucc.edu.co/bitstream/20.500.12494/34899/4/2021_solidos_platonicos_estrategia.pdf)
- Vílchez, E. (2007). Sistemas expertos para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en la educación superior. *Cuadernos*, 3, 42-64.  
<https://reunir.unir.net/handle/123456789/614>
- Weiss, C. (1990). *Investigación evaluativa. Método para determinar la eficiencia de los programas de acción*. Trillas.
- Woolfolk, A. (2010). *Psicología Educativa*. Pearson.
- Yin S. (2009). *The Mathematics of Origami*. 1-18.  
<https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.574.6604&rep=rep1&type=pdf>

## **ANEXOS**

## Anexo 1 Instrumento de validación

### Instrumento Prueba de conocimientos sobre pensamiento geométrico

#### Pregunta de investigación

¿Cuáles serán los efectos de un programa virtual de origami sobre el pensamiento geométrico de los estudiantes del grado tercero de primaria de la Institución Educativa Distrital Alemania Unificada (Bogotá D.C. – Colombia)?

**Pregunta específica:** ¿Cómo es el pensamiento geométrico de los estudiantes del tercer grado de primaria de la Institución Educativa Distrital Alemania Unificada?

#### Tabla de operacionalización

Variable	Operacionalización (concepto aplicado al proyecto)	Dimensiones	Indicadores	Ítems
<b>Pensamiento geométrico</b>  "... conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales" (MEN, 2006, 61).	<b>Niveles del pensamiento geométrico</b>  Están configurados por procesos de razonamiento que indican el grado de comprensión del aprendizaje geométrico, en el que se desarrollan habilidades que se manifiestan mediante los conocimientos de los estudiantes.	Reconocimiento (visualización)	4. Identifica la apariencia de las figuras geométricas.	1, 4
			5. Ubica objetos y figuras en el plano.	7, 10
			6. Reconoce las nociones de horizontalidad, verticalidad	13, 16
		Análisis	4. Establece diferencias y similitudes entre objetos bidimensionales y tridimensionales.	2, 9
			5. Distingue las nociones de paralelismo y perpendicularidad en figuras planas.	14, 17
			6. Infiere cuando las figuras planas han sufrido una transformación (traslación, rotación, reflexión o simetría, ampliación, reducción).	8, 11
		Relaciones, clasificación u ordenamiento	4. Relaciona objetos tridimensionales con sus respectivas vistas.	3, 12

			5. Vincula diseños y construcciones de cuerpos y figuras geométricas	6, 15
			6. Relaciona dirección, distancia y posición en el espacio	5, 18

**Objetivo del instrumento:**

- Describir el pensamiento geométrico en los estudiantes del grado tercero de primaria de la Institución Educativa Distrital Alemania Unificada (Bogotá D.C. – Colombia).

**Dimensiones que mide:**

Niveles del pensamiento geométrico.

**Reconocimiento (Visualización):** En este nivel el estudiante percibe las figuras geométricas de manera global, ignorando sus propiedades y/o características. En este punto, el aprendiz no identifica las partes componentes en un sistema geométrico, se limita a enfatizar aspectos sobre la posición de la figura en el plano.

**Análisis:** En este nivel el estudiante identifica los componentes y atributos de las figuras, puede relacionar conjuntos de objetos según características geométricas, es capaz de hacer clasificaciones exclusivas de algunas figuras geométricas.

**Relaciones, clasificación u ordenamiento:** En este nivel el estudiante es capaz de establecer relaciones lógicas entre las propiedades y conceptos; formulan definiciones abstractas estableciendo las propiedades que deben tener las figuras geométricas.

**Estimado experto en el tema, se solicita evaluar los ítems con los siguientes criterios:**

**Claridad en la redacción:** es una sentencia clara y precisa, que sigue criterios de sintaxis y léxico entendibles.

**Pertinencia:** la pregunta es pertinente con la dimensión que pretende medir.

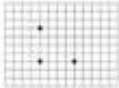
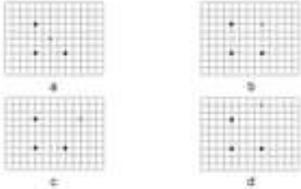
**Inducción a la respuesta:** el enunciado está redactado de tal forma que guía la respuesta hacia una tendencia particular.

**Lenguaje adecuado al nivel del informante:** el lenguaje utilizado es apropiado y entendible para estudiantes del cuarto grado de primaria, con edades entre 8 y 9 años.

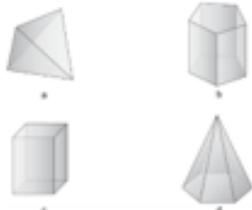
**Validez:** el enunciado se relaciona directamente con el objeto de estudio.

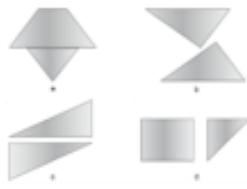
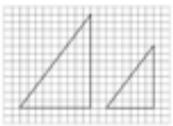
**Dimensión Reconocimiento (Visualización)**

Ítems	Criterios a Evaluar																		
	Claridad en la redacción		Pertinencia		Inducción a la respuesta		Lenguaje adecuado con el nivel del informante		Mide lo que pretende (validez)										
<p>1. ¿Cuál de las siguientes figuras es un triángulo?</p>  <p>a      b      c      d</p>	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO									
	<b>Observaciones</b>																		
<p>4. ¿Cuál de las siguientes figuras es la más pequeña?</p>  <p>a      b      c      d</p>	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO									
	<b>Observaciones</b>																		
<p>7. ¿Dónde está ubicada la caja gris?</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>Amarillo</td><td>Azul</td><td>Rojo</td></tr> <tr> <td>Verde</td><td>Blanco</td><td>Negro</td></tr> <tr> <td>Gris</td><td>Violeta</td><td>Marrón</td></tr> </table> <p>a) Arriba de la blanca y al lado de la amarilla  b) Debajo de la verde y al lado de la violeta  c) Arriba de la negra y al lado de la azul  d) Debajo de la roja y al lado de la blanca</p>	Amarillo	Azul	Rojo	Verde	Blanco	Negro	Gris	Violeta	Marrón	SI	NO								
Amarillo	Azul	Rojo																	
Verde	Blanco	Negro																	
Gris	Violeta	Marrón																	
	<b>Observaciones</b>																		

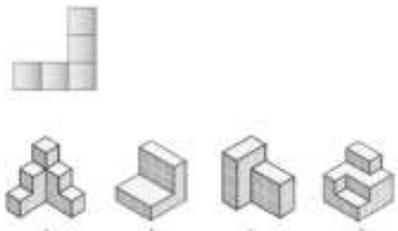
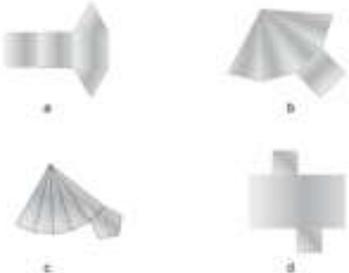
Ítems	Criterios a evaluar									
	Claridad en la redacción		Pertinencia		Adecuación a la respuesta		Lenguaje adecuado con el nivel del informante		Mide lo que pretende (validez)	
	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO
<p>10. Quieres dibujar un cuadrado en la cuadrícula, pero sólo tienes tres puntos.</p>  <p>¿Dónde debes ubicar el cuarto punto para dibujar un cuadrado?</p> 	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO
<b>Observaciones:</b>										
<p>13. ¿Cuáles de las siguientes flechas son horizontales?</p>  <p>a. Flechas a y b b. Flechas a y c c. Flechas a y d d. Flechas c y d</p>	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO
<b>Observaciones:</b>										
<p>16. ¿Cuáles son los lápices que están en posición vertical?</p>  <p>a. Lápices a y b b. Lápices a y c c. Lápices b y c d. Lápices a y d</p>	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO
<b>Observaciones:</b>										

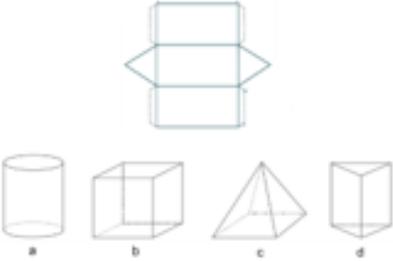
**Dimensión: Análisis**

Ítems	Criterios a Evaluar									
	Claridad en la redacción		Pertinencia		Inducción a la respuesta		Lenguaje adecuado con el nivel del informante		Mide lo que pretende (validez)	
<p>2. ¿Cuál de los siguientes objetos tiene medidas de alto y ancho?</p>  <p>a                  b                  c                  d</p>	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO
	<b>Observaciones</b>									
<p>9. ¿Cuáles de las siguientes figuras son prismas?</p>  <p>a                  b</p> <p>c                  d</p> <p>a. Las figuras a y b b. Las figuras b y c c. Las figuras c y d d. Las figuras b y d</p>	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO
	<b>Observaciones</b>									
<p>14. ¿Cuáles de las siguientes rectas dibujadas en una hoja son paralelas?</p>  <p>a                  b                  c                  d</p> <p>a. Rectas a y c b. Rectas c y d c. Rectas b y c d. Rectas a y d</p>	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO
	<b>Observaciones</b>									

Ítems	Criterios a Evaluar									
	Claridad en la redacción		Pertinencia		Inducción a la respuesta		Lenguaje adecuado con el nivel del informante		Mide lo que pretende (validar)	
<p>17. ¿Cuáles de las siguientes rectas dibujadas en una hoja son perpendiculares?</p>  <p>a. Rectas a y b b. Rectas b y c c. Rectas a y d d. Rectas c y d</p>	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO
<b>Observaciones</b>										
<p>8. Andrés armó esta figura uniendo dos piezas</p>  <p>¿Cuál de los siguientes pares de piezas usó Andrés para armar la figura?</p> 	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO
<b>Observaciones</b>										
<p>11. Jaime quiere obtener la figura pequeña a partir de la grande</p>  <p>¿Qué tiene que hacer Jaime?</p> <p>a. Trasladar la figura grande b. Reflejar la figura grande c. Girar la figura grande d. Reducir la figura grande</p>	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO
<b>Observaciones</b>										

**Dimensión Relaciones, clasificación u ordenamiento (abstracción)**

Ítems	Criterios a Evaluar									
	Claridad en la redacción		Pertinencia		Inducción a la respuesta		Lenguaje adecuado con el nivel del informante		Mide lo que pretende (validez)	
<p>3. ¿Cuál es la vista de planta de este prisma?</p> 	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO
<b>Observaciones</b>										
<p>12. ¿A cuál de los siguientes objetos corresponde esta vista de perfil?</p> 	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO
<b>Observaciones</b>										
<p>6. ¿Cuál de las siguientes piezas debes seleccionar para construir una pirámide de base cuadrada?</p> 	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO
<b>Observaciones</b>										

Ítems	Criterios a Evaluar									
	Claridad en la redacción		Pertinencia		Inducción a la respuesta		Lenguaje adecuado con el nivel del informante		Mide lo que pretende (validez)	
15. ¿Cuál de las siguientes figuras puedes construir con esta pieza?  	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO
<b>Observaciones:</b>										
5. Martha está ubicada en la octava fila del cine y Elena está seis filas más arriba. ¿En cuál fila está ubicada Elena?  a. En la fila 6 b. En la fila 2 c. En la fila 18 d. En la fila 14	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO
<b>Observaciones:</b>										
18. Diego está en la pizzería y quiere ir al museo. ¿Cuáles indicaciones le darías para ayudarlo a llegar teniendo el siguiente mapa?  	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO
<b>Observaciones:</b>										
a. Camina dos cuadras hacia arriba y luego dos a la derecha. b. Camina una cuadra hacia la izquierda y luego dos a la derecha. c. Camina dos cuadras hacia la izquierda. d. Camina una cuadra hacia la derecha.										

**Notas:**

Las figuras 1, 2, 3, 4, 7, 12, 13, 14, 15, 16, 17 y 18 fueron elaboradas por el autor.

Las figuras 6, 8 y 9 fueron tomadas de Santillana (s.f.). Prueba Saber Matemática 3º grado.

Las figuras 10 y 11 fueron tomadas de Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación [ICFES]. (2015). Cuadernillo de Prueba. Ejemplos de preguntas SABER 3º matemáticas. Ministerio de Educación Nacional.

La figura 15 fue tomada de Instruimos. (s.f.). Simulacro Pruebas SABER 3º. Alcaldía de Itagüí.

Validez			
Aplicable		No aplicable	
Aplicando haciendo los respectivos cambios			

Aspectos Generales	Sí	No	Observaciones
El instrumento contiene instrucciones claras y precisas para responder el cuestionario			
Los ítems permiten el logro del objetivo de la investigación			
Los ítems están distribuidos en forma lógica y secuencial			
El número de ítems es suficiente para recoger la información. En caso de ser negativa su respuesta, sugiera los ítems a añadir			

Validado por:
Experiencia docente:
Nivel Académico:
Fecha:
Observaciones en general:

## Anexo 2 Constancias de validación por expertos

Validez			
Aplicable	X	No aplicable	
Aplicando haciendo los respectivos cambios			

Aspectos Generales	Sí	No	Observaciones
El instrumento contiene instrucciones claras y precisas para responder el cuestionario	X		
Los ítems permiten el logro del objetivo de la investigación	X		
Los ítems están distribuidos en forma lógica y secuencial	X		
El número de ítems es suficiente para recoger la información. En caso de ser negativa su respuesta, sugiera los ítems a añadir	X		



Validado por: John Henry Durango Urrego
Experiencia docente: más de 20 años
Nivel Académico: Doctor en Educación Matemática, Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
Fecha: 24 de abril de 2022
Observaciones en general:  N/A

Validez			
Aplicable	x	No aplicable	
Aplicando haciendo los respectivos cambios			

Aspectos Generales	Sí	No	Observaciones
El instrumento contiene instrucciones claras y precisas para responder el cuestionario	x		
Los ítems permiten el logro del objetivo de la investigación	x		
Los ítems están distribuidos en forma lógica y secuencial	x		
El número de ítems es suficiente para recoger la información. En caso de ser negativa su respuesta, sugiera los ítems a añadir	x		

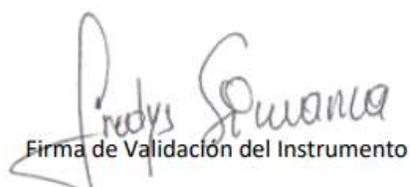


Validado por: Argemiro Avendaño Ramírez
Experiencia docente: Universidad del Valle. Magisterio Colombiano.
Nivel Académico: Doctor en Ciencias Pedagógicas
Fecha: Mayo 13 de 2022
Observaciones en general: El instrumento es válido según los criterios definidos por el investigador, los cuales son coherentes con los lineamientos generales de la metodología de la investigación. Es perfectamente aplicable a estudiantes del grado tercero de primaria y permite el diagnóstico de acuerdo al objeto de estudio y campo de acción en el cual se centra el objetivo.

Validez			
Aplicable	X	No aplicable	
Aplicando haciendo los respectivos cambios			

Aspectos Generales	Sí	No	Observaciones
El instrumento contiene instrucciones claras y precisas para responder el cuestionario	X		
Los ítems permiten el logro del objetivo de la investigación	X		
Los ítems están distribuidos en forma lógica y secuencial	X		
El número de ítems es suficiente para recoger la información. En caso de ser negativa su respuesta, sugiera los ítems a añadir	X		

<b>Validado por: FREDYS ALBERTO SIMANCA HERRERA</b>
Experiencia docente: Profesor investigador universidad Cooperativa de Colombia, con más de 15 años de experiencia como docente universitario. Profesor por 7 años de la especialización en Multimedia para la Docencia y 5 años en la Maestría de Informática Aplicada a la Educación de la misma Universidad.
Nivel Académico: Doctor
Fecha: 09-05-2022
Observaciones en general: Una sola observación en el instrumento

  
 Firma de Validación del Instrumento

Validez			
Aplicable	x	No aplicable	
Aplicando haciendo los respectivos cambios			

Aspectos Generales	Sí	No	Observaciones
El instrumento contiene instrucciones claras y precisas para responder el cuestionario	x		
Los ítems permiten el logro del objetivo de la investigación	x		
Los ítems están distribuidos en forma lógica y secuencial	x		
El número de ítems es suficiente para recoger la información. En caso de ser negativa su respuesta, sugiera los ítems a añadir	x		



Validado por: Andrés León Pirela
Experiencia docente: 24 años en el área de matemáticas
Nivel Académico: Doctor en Educación / Especialista en Metodología de la Educación
Fecha: 30 de abril de 2022
Observaciones en general: El instrumento guarda relación con la variable que pretende estudiar y está construido de forma apropiada para los estudiantes del tercer grado.

*Andrés León Pirela*



Validez			
Aplicable	x	No aplicable	
Aplicando haciendo los respectivos cambios			

Aspectos Generales	Sí	No	Observaciones
El instrumento contiene instrucciones claras y precisas para responder el cuestionario	x		
Los ítems permiten el logro del objetivo de la investigación	x		
Los ítems están distribuidos en forma lógica y secuencial	x		
El número de ítems es suficiente para recoger la información. En caso de ser negativa su respuesta, sugiera los ítems a añadir	x		



Validado por: Sonia Ferrer
Experiencia docente: 30 años
Nivel Académico: Doctora en Educación
Fecha: 28 de abril de 2022
Observaciones en general: Se considera que el instrumento es válido en cuanto a su contenido y construcción.



### Anexo 3. Instrumento (Versión final)

## ÁREA MATEMÁTICAS. PENSAMIENTO GEOMÉTRICO

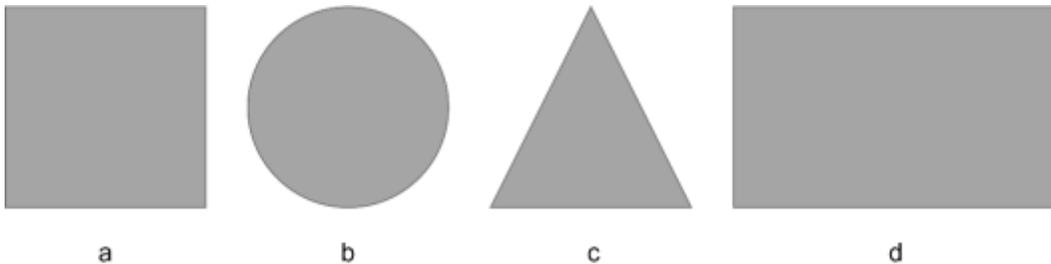
Elaborado por Erlin Blandón. (2022)

Nombre: \_\_\_\_\_ Fecha: \_\_\_\_\_

Curso  301  302 Edad:  8 años  9 años  10 años

Lee atentamente cada una de las preguntas y responde encerrando en un círculo la letra que corresponde a la opción que consideras correcta.

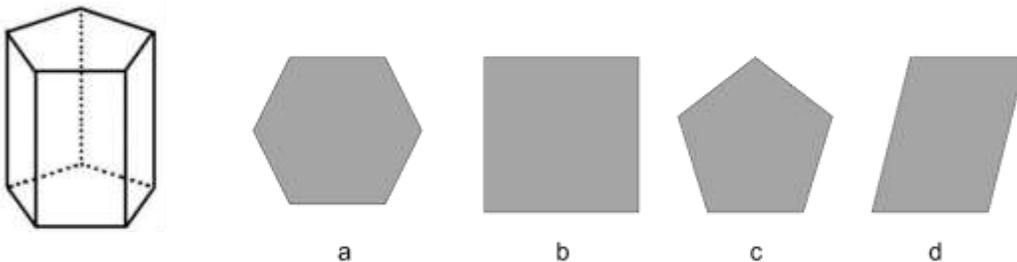
1. ¿Cuál de las siguientes figuras es un triángulo?



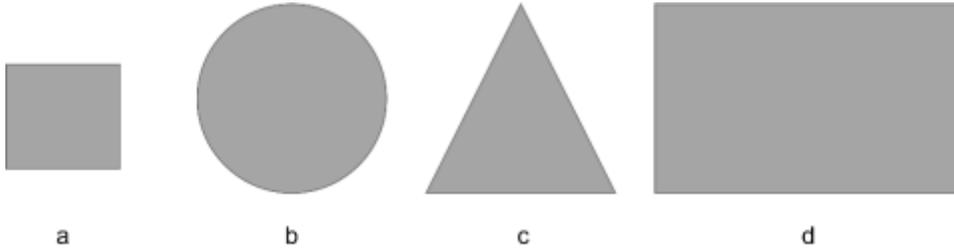
2. ¿Cuál de los siguientes objetos tiene medidas de alto y ancho?



3. ¿Cuál es la vista de planta de este prisma?



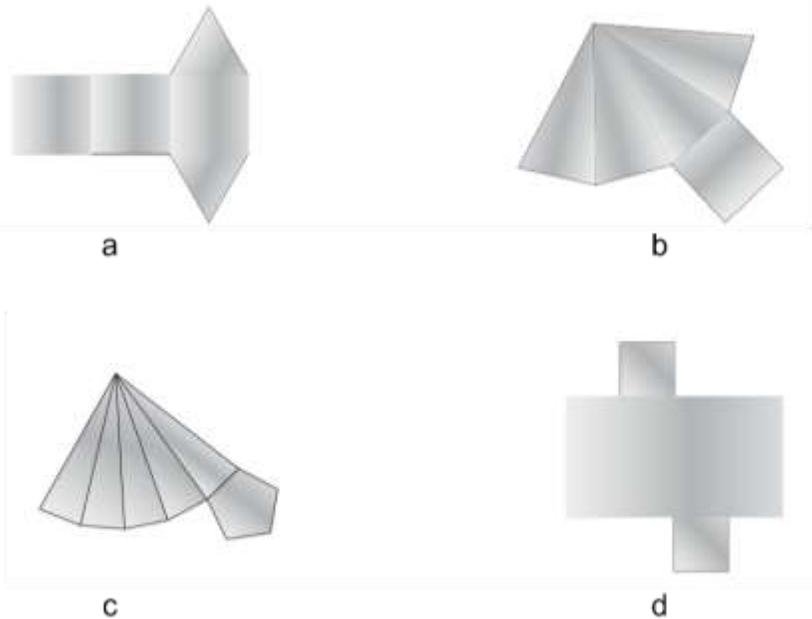
4. ¿Cuál de las siguientes figuras es la más pequeña?



5. Martha está en la octava fila del cine y Elena seis filas más arriba. ¿En cuál fila está Elena?

- a. En la fila 6
- b. En la fila 2
- c. En la fila 18
- d. En la fila 14

6. ¿Cuál de las siguientes piezas debes seleccionar para construir una pirámide de base cuadrada?

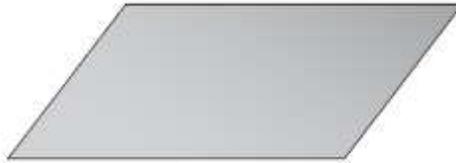


7. ¿Dónde está ubicada la caja gris?

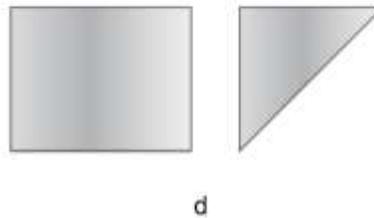
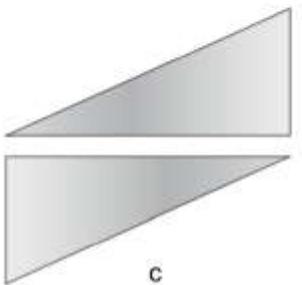
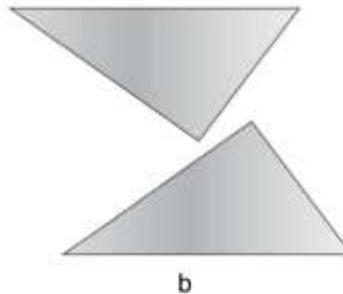
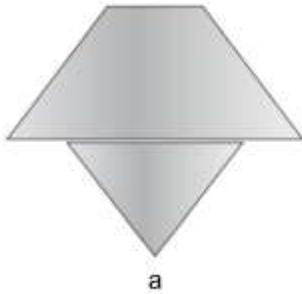


- a) Arriba de la blanca y al lado de la amarilla
- b) Debajo de la verde y al lado de la violeta
- c) Arriba de la negra y al lado de la azul
- d) Debajo de la roja y al lado de la blanca

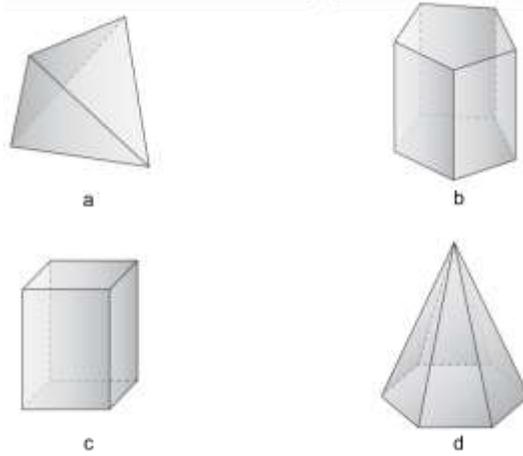
8. Andrés armó esta figura uniendo dos piezas



¿Cuál de los siguientes pares de piezas usó Andrés para armar la figura?

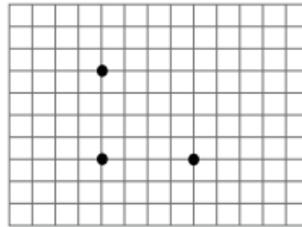


9. ¿Cuáles de las siguientes figuras son prismas?

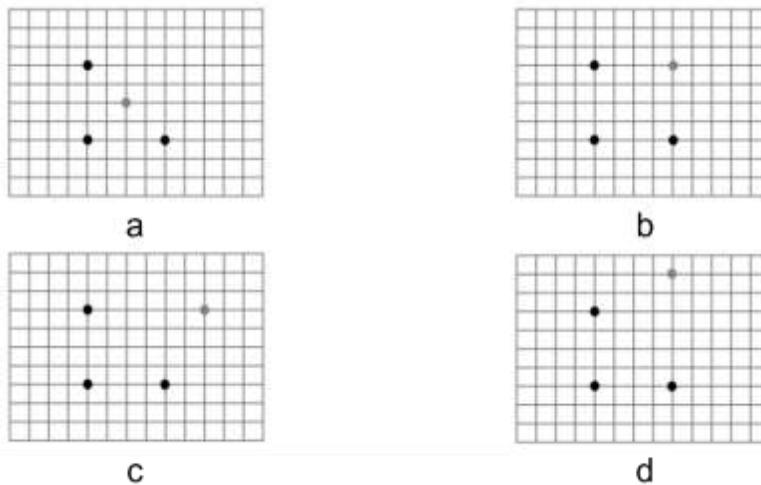


- a. Las figuras a y b
- b. Las figuras b y c
- c. Las figuras c y d
- d. Las figuras b y d

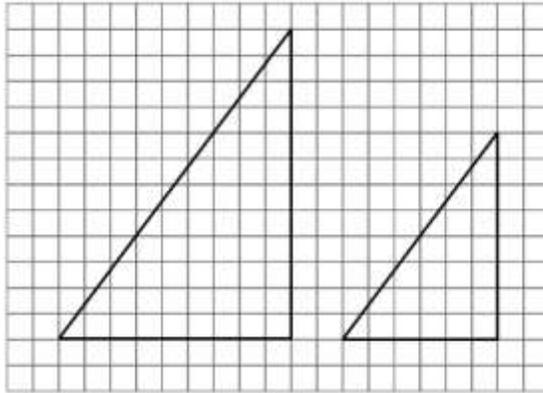
10. Quieres dibujar un cuadrado en la cuadrícula, pero sólo tienes tres puntos



¿Dónde debes ubicar el cuarto punto para dibujar un cuadrado?



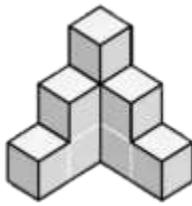
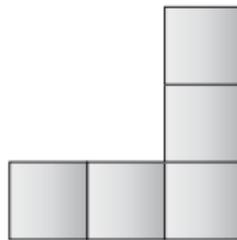
11. Jaime quiere obtener la figura pequeña a partir de la grande



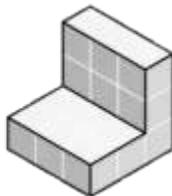
¿Qué tiene que hacer Jaime?

- a. Trasladar la figura grande
- b. Reflejar la figura grande
- c. Girar la figura grande
- d. Reducir la figura grande

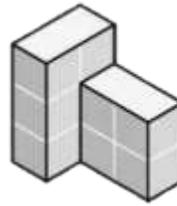
12. ¿A cuál de los siguientes objetos corresponde esta vista de perfil?



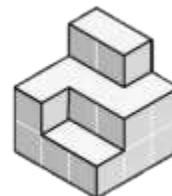
a



b

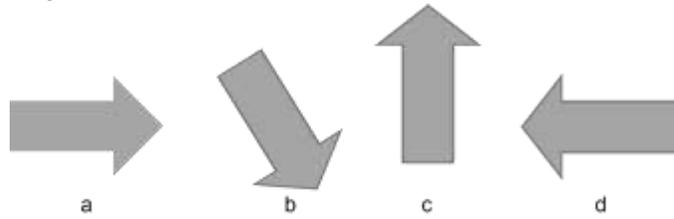


c



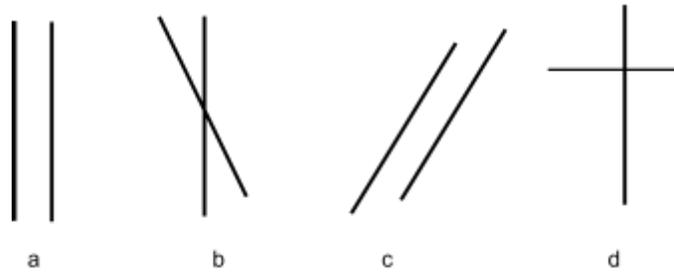
d

13. ¿Cuáles de las siguientes flechas son horizontales?



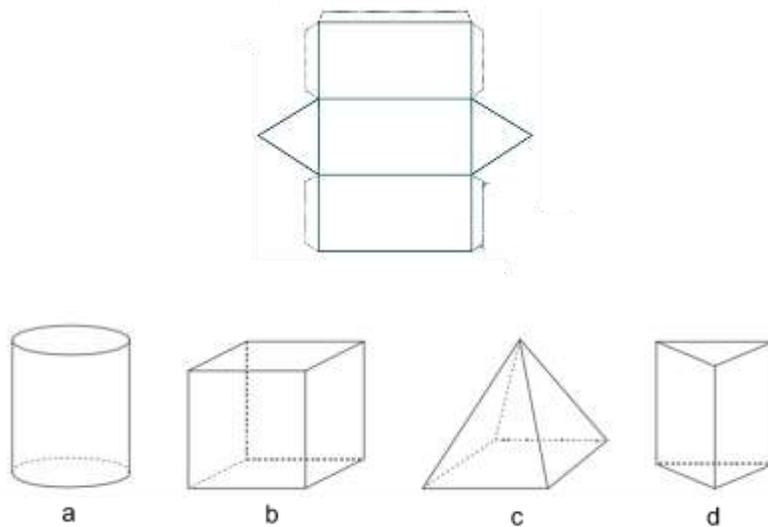
- a. Flechas a y b
- b. Flechas a y c
- c. Flechas a y d
- d. Flechas c y d

14. ¿Cuáles de las siguientes rectas son paralelas?

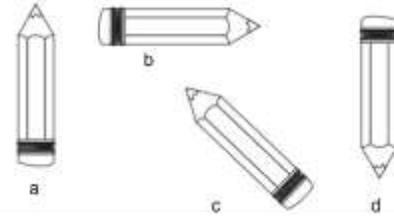


- a. Rectas a y c
- b. Rectas c y d
- c. Rectas b y c
- d. Rectas a y d

15. ¿Cuál de las siguientes figuras puedes construir con esta pieza?



16. ¿Cuáles son los lápices que están en posición vertical?



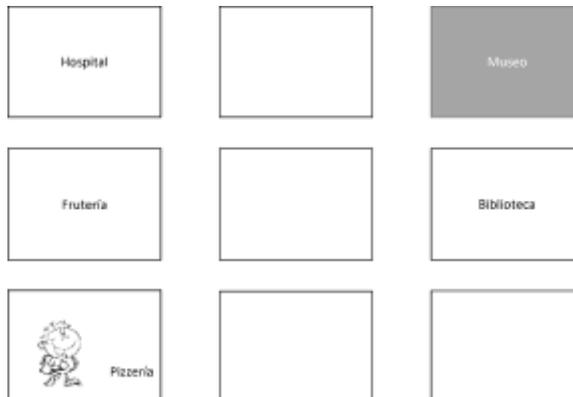
- a. Lápices a y b
- b. Lápices a y c
- c. Lápices b y c
- d. Lápices a y d

17. ¿Cuáles de las siguientes rectas son perpendiculares?



- a. Rectas a y b
- b. Rectas b y c
- c. Rectas a y d
- d. Rectas c y d

18. Diego está en la pizzería y quiere ir al museo. ¿Cuáles indicaciones le darías para ayudarlo a llegar?



- a. Camina dos cuadras hacia arriba y luego dos a la derecha.
- b. Camina una cuadra hacia la izquierda y luego dos a la derecha.
- c. Camina dos cuadras hacia la izquierda.
- d. Camina una cuadra hacia la derecha.

#### **Anexo 4. Programa Origami: un universo de posibilidades**

---

La secuencia didáctica que se presenta, *Origami: un universo de posibilidades*, propone la práctica guiada de las técnicas del origami, mediante el empleo de material manipulativo propio de dicho arte, visto con carácter educativo y dirigido al fortalecimiento del pensamiento geométrico en los estudiantes de tercer grado, así como a la mejora del rendimiento académico de los mismos en el área de matemáticas.

Por lo anterior, el abordaje técnico de los contenidos de geometría en el proceso de enseñanza aprendizaje resulta clave para el desarrollo integral del estudiante, tanto en la dimensión personal, socioemocional e intelectual, especialmente durante el primer tramo de educación básica obligatoria, cuando el niño y la niña van transitando por diversas etapas de madurez cognitiva para el aprendizaje formal de conceptos y destrezas viso-espaciales.

En esencia, se desarrolla una secuencia que, además de constituir un espacio interactivo entre el profesorado de matemáticas, el estudiante de básica y la comunidad de aprendizajes en general, incorpora una serie de sesiones didácticas diseñadas para que los estudiantes logren fortalecer sus competencias del pensamiento geométrico a través de la manipulación manual del papel y los principios elementales de la papiroflexia, brindando al estudiante la posibilidad de avanzar en aprendizajes sobre geometría que sean asertivos y acordes al grado que cursa.

Contiene actividades y material visual para que los estudiantes desarrollen sus capacidades a través de la práctica con papel y el trabajo colaborativo, para el fortalecimiento de las competencias que se deseen desarrollar en el aula. Por su parte, se considera la conveniencia que envuelve la puesta en marcha de esta propuesta en el ámbito de la educación formal para orientar el proceso de enseñanza y aprendizaje de los contenidos geométricos, además de la relevancia social que aporta, sus implicaciones prácticas, utilidad metodológica de la

investigación y sus aportes teóricos hacia el ámbito de la investigación científica dentro de la didáctica de las matemáticas.

### **Justificación**

A nivel nacional, durante los últimos años ha persistido un déficit en las competencias matemáticas de los estudiantes colombianos (Pineda y Téllez, 2019), situación que se ha evidenciado a través de los resultados extraídos en pruebas de conocimiento aplicadas a nivel de Estado, cuyas proyecciones indican que la mayoría de los estudiantes presentan competencias mínimas e insuficientes, con un rendimiento medianamente satisfactorio en el área de matemáticas (ICFES, 2019), situación que no es ajena a la población estudiantil del instituto IEDAU.

Ante las actuales necesidades de aprendizaje y rendimiento en el área de matemáticas que se evidencian en el contexto de estudio, las estrategias y actividades que integran esta propuesta resultan convenientes, dado que los resultados obtenidos desde la aplicación de pruebas internas y externas de la IEDAU han puesto de manifiesto que, por carácter general, los estudiantes de etapa básica muestran competencias no acordes a la edad y grado de escolaridad cursado.

Sumado a esto, el negativo impacto generado a raíz de la pandemia sanitaria asociada al virus por Covid-19 impuso un nuevo orden en las metodologías de apoyo entre docentes y estudiantes, situación en la cual, las instituciones educativas del país y del mundo se vieron en la necesidad de migrar sus funciones hacia la virtualidad, con una escasa preparación por parte de los establecimientos educativos para enfrentar estas emergencias. Por esto, frente a la falta de conectividad y una metodología consensuada, se incrementaron las deficiencias en el aprendizaje del área de matemáticas, ya que los estudiantes se mantuvieron aislados y sin un debido acompañamiento durante las actividades académicas (Galindo, 2021).

Esta problemática ha venido generando una situación marcada por un gradual desinterés y

falta de motivación por parte del estudiante dentro del aula de matemáticas, al ser una de las disciplinas en la que mayormente los escolares presentan dificultades de aprendizaje, dado que se percibe como un área abstracta, de amplia complejidad y escasamente vinculada con la realidad (Blanco *et al.*, 2010). Por las razones antes mencionadas, se hace inminente la incorporación de estrategias y actividades dinámicas para el aprendizaje de conceptos geométricos dentro de la didáctica de las matemáticas en la etapa básica, mediante las cuales los estudiantes aumenten su motivación y fortalezcan sus competencias para el pensamiento geométrico, haciendo uso tanto de material convencional como de diferentes recursos disponibles en la virtualidad para desarrollar su creatividad.

Dado que las competencias matemáticas en general no se alcanzan en un estudiante por generación espontánea, sino que ameritan la creación de ambientes formativos en los que se aborde un aprendizaje de manera enriquecida y centrada en la realidad percibida por el niño, se requiere el diseño de actividades didácticas en las que se motive al estudiante hacia la participación activa y la comprensión significativa de situaciones problema que posibiliten su avance a niveles de competencia más complejos (MEN, 2006).

Es por ello que, esta propuesta se vuelve pertinente dentro del contexto de investigación seleccionado, ya que pretende brindar aportes en el ámbito de la didáctica de las matemáticas, y a su vez, contribuir con la mejora del rendimiento escolar de los estudiantes de tercer grado de la IEDAU, a la hora de someter a evaluación los aprendizajes en las pruebas internas y/o externas que se aplican por la institución, lo que constituye una base fundamental para la creación, desarrollo y seguimiento de planes de mejoramiento pertinentes, acordes y enfocados al fortalecimiento de competencias focalizadas en la población atendida.

Concretamente, en esta propuesta se hace énfasis en el estudio de la geometría mediante la composición artística visual de elementos; aunado con el diseño y construcción de objetos artesanales producidos desde la práctica de la papiroflexia, aplicando la observación y

reproducción de patrones diversos, para producir diferentes formas y objetos que aproximen la comprensión de contenidos específicos de la geometría (MEN, 2006) y establecer espacios motivadores para el desarrollo del pensamiento geométrico en los estudiantes de etapa básica.

### **Propósitos y objetivos**

La propuesta tiene como principal propósito el fortalecimiento de las competencias del pensamiento geométrico y espacial en los estudiantes del tercer grado de la IEDAU, desde los primeros niveles aplicados para el desarrollo de este modelo mental; es decir, se persigue que el niño y la niña de etapa básica logren percibir las figuras geométricas desde un enfoque integral y comprensible, basado en la aplicación de estrategias lúdicas para el conocimiento de nociones geométricas a través del doblado del papel. Además, desde las bases del MEN (2006) se pretende con esta propuesta fomentar actitudes de aprecio, seguridad y confianza hacia el aprendizaje de matemáticas en los estudiantes de básica.

Se precisa entonces, ofrecer al docente de matemáticas un enfoque desarrollador para una enseñanza de los contenidos de geometría situada, dinámica y centrada en el estudiante como principal constructor del aprendizaje mediante la práctica del arte. De esta forma, se busca desarrollar competencias en el estudiantado para que sean capaces de resolver problemas, trabajar con sus pares, cuestionarse y mejorar su percepción espacial, provocando cambios positivos dentro del estado actual del desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico (Ortiz *et al.*, 2018).

De igual manera, mediante esta propuesta de intervención didáctica se pretende fomentar el uso de las técnicas del origami en los diferentes campos de pensamientos institucionales, al establecer una política de implementación de estrategias educativas que permitan fortalecer las competencias del estudiante en el aula de matemáticas, sobre la base de evidenciar a través de pruebas externas la importancia de implementar nuevas prácticas formativas para la enseñanza

de los contenidos de geometría.

A partir de los planteamientos mencionados y en aras de establecer estrategias y actividades asertivas dentro de los procesos de formación en el área de matemáticas en la IEDAU, los objetivos de la propuesta se orientan hacia el fortalecimiento de la competencia geométrica del estudiante, desde los niveles que componen el pensamiento geométrico, concretamente, los tres primeros niveles del modelo de Van Hiele (1999), a fin de diseñar procesos de aprendizaje en los que el profesorado pueda mediar los conocimientos desde escenarios socioculturales en los que se aproveche la efectividad y versatilidad de recursos artísticos como el origami, aplicados en la didáctica de las matemáticas (MEN, 2006).

En este orden, las actividades diseñadas para la presente secuencia didáctica están dirigidas a niños con edades comprendidas entre los 8 y 10 años, por cuanto ha de tenerse en consideración la adecuación de las estrategias y contenidos de geometría según las características de la población de estudiantes, para ello, se plantean los siguientes objetivos de la propuesta:

### **Objetivo general**

Desarrollar competencias del pensamiento geométrico en los estudiantes de tercer grado de la IEDAU (Bogotá D.C. – Colombia), a través de la utilización de las técnicas del origami en el aula de matemáticas.

### **Objetivos específicos**

- Facilitar el aprendizaje de los contenidos geométricos desde el nivel de razonamiento, a través de la manipulación de material concreto para la práctica del origami por parte de los estudiantes del tercer grado de la IEDAU.
- Fortalecer la capacidad de análisis respecto a los contenidos de geometría en los

estudiantes del tercer grado de la IEDAU, mediante la composición artística implícita en las técnicas del origami.

- Potenciar las habilidades para el establecimiento de relaciones, clasificaciones u ordenamiento de elementos geométricos por parte de los estudiantes del tercer grado de la IEDAU, haciendo uso de material manipulativo para la práctica del origami.

### **Fundamentación teórica**

La presente propuesta está fundamentada desde los cinco procesos generales contemplados en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 2006) los cuales son: formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad (sistema figurativo mental, gráfico o tridimensional que reproduce o representa la realidad en forma esquemática para hacerla más comprensible); comunicar; razonar, y formular comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos.

Por su parte, el desarrollo del pensamiento geométrico y las habilidades para la aplicación de la lógica empleados desde el primer tramo de educación básica, se producen de forma efectiva cuando se utilizan en el aula modelos y materiales físicos y/o manipulativos que ayuden a entender la base de las ciencias matemáticas, no siendo una disciplina que busca la memorización de reglas y algoritmos para la resolución de dilemas, sino, que persigue un sentido lógico para la comprensión profunda de las cosas, lo que puede potenciar en el estudiante su capacidad para pensar, cuando se trabajan de forma entretenida (MEN, 2006).

Adicionalmente, cabe destacar que el aprendizaje de la geometría está sustentado en tres procesos fundamentales que se vinculan directamente con el desarrollo de habilidades mentales que incluyen la visualización, justificación y construcción geométrica (Urquina, 2004), cada una de las cuales resulta idónea para el estudio y abordaje técnico de las nociones geométricas, sobre todo desde las primeras etapas formativas, aspectos que forman parte de los argumentos que

soportan esta propuesta.

Desde una perspectiva institucional, la secuencia didáctica se fundamenta en un esquema de actividades apoyado en los estándares básicos de competencias para el área de las matemáticas (MEN, 2006), enfatizando en el pensamiento espacial y sistema métrico, haciendo uso de las técnicas del origami para facilitar la comprensión de los contenidos en la población estudiantil de tercer grado.

En tal sentido, los fundamentos teóricos de esta propuesta se encuentran en la conceptualización, clasificación y uso didáctico del origami en la enseñanza de la geometría. Al respecto, se define al origami como un arte de origen japonés, también llamado “papiroflexia” y traducido de la siguiente manera: *ori* (que significa “doblado”) y *kami* (papel). Es un arte que consiste en la manipulación precisa del papel, a fin de hacer coincidir los bordes y realizar dobleces para la creación de diferentes figuras simples o complejas (Rodríguez Pedraza, 2014).

El uso del origami puede clasificarse según la finalidad, el tipo de papel utilizado y la cantidad de piezas utilizadas. Respecto a la finalidad, el origami puede ser artístico desde la construcción de figuras de la naturaleza o para ornamento o educativa creación de figuras para el estudio de propiedades geométricas; de acuerdo con la forma del folio como papel completo en forma cuadrangular, rectangular o triangular o trozo inicial de papel en forma de tiras largas. Y conforme a la cantidad de trozos; un solo trozo de papel inicial o varios trozos de papel iniciales que se pliegan para formar unidades, las cuales se ensamblan para formar una figura compleja (Blanco & Otero, 2005).

A su vez, Amaya y Gulfo (2009) expresan que la utilidad del origami en la clase de geometría permite desarrollar estrategias metacognitivas en los estudiantes e iniciarlos en el cálculo algebraico desde un enfoque artístico-lúdico; siendo un puente para el abordaje didáctico de conceptos matemáticos como segmentos, rectas, ángulos, familias de poliedros y composición general de polígonos, así como para el estudio de las propiedades de cada una de estas figuras

mediante las cuales se accede a la construcción de módulos requeridos para ensamblar las piezas de papel.

Desde la perspectiva de aprendizaje de las matemáticas, en la papiroflexia están inmersos elementos simples de la geometría, porque en cada pieza de papel se detectan patrones geométricos, combinaciones de ángulos y rectas que originan diversas formas en papel. Incluso, se reconocen diversas figuras geométricas fundamentales con las que se producen distintos modelos tradicionalmente desarrollados por los japoneses, tales como la cometa, el pez, el pájaro, la rana, entre otras (Blanco & Otero, 2005).

En cuanto al fundamento pedagógico, esta propuesta se enmarca en un diseño de actividades sustentado por el Modelo de desarrollo del pensamiento geométrico de Van Hiele (1999), donde se trabajarán los tres primeros niveles. El primer nivel hace referencia al “reconocimiento (también llamado visualización)”, que corresponde con aquellas acciones inicialmente ejecutadas por el estudiante cuando percibe figuras geométricas de manera global, ignorando sus propiedades y/o características. En este punto, el aprendiz no está centrado en identificar las partes componentes en un sistema geométrico, sino que se limita a enfatizar aspectos sobre la posición de la figura en el plano.

Por su parte, el segundo nivel del modelo hace énfasis en el “análisis”, cuando el estudiante toma consciencia respecto a la formación de las figuras geométricas, es decir, reconoce sus partes y consideran que están dotadas de propiedades matemáticas. En este punto, descubre experimentalmente relaciones entre componentes de una figura, reconoce características relevantes, identifica la posición de las figuras como un atributo poco relevante, desconoce que una figura puede pertenecer a varias clases y atender a nombres distintos, no establece relaciones desde deducciones lógicas, ni es capaz aún de hacer demostraciones formales respecto a los conceptos estudiados.

Finalmente, el tercer nivel alude a las “relaciones, clasificación u ordenamiento (también

llamado abstracción)", en el cual el estudiante empieza a desarrollar habilidades de razonamiento matemático y comienza a plantear deducciones, lo que alude a la capacidad de entender significados sobre las definiciones dadas. Es en este nivel cuando el estudiante es capaz de establecer relaciones lógicas y seguir razonamientos sencillos, no obstante, aún no comprende el funcionamiento de sistemas axiomáticos en el proceso de validación del conocimiento geométrico. Es por estos motivos que, en esta propuesta se parte desde la premisa de contextualizar los saberes y crear un ambiente dinámico para la didáctica de las matemáticas en el aula de tercer grado, a través de lo cual se posibilite que los estudiantes perciban los contenidos con facilidad y entusiasmo, a la vez que desarrollan sus competencias para la geometría, destrezas viso-espaciales y habilidades artístico-culturales relacionadas con el origami, como una forma de expresión.

### **Administración**

La administración del *Programa: Origami: un universo de posibilidades* será llevada a cabo por los profesores del área de matemáticas del tercer grado de educación básica pertenecientes a la IEDAU en Bogotá – Colombia. El profesorado estará encargado de poner en marcha las estrategias formuladas en la propuesta, mediante la ejecución de cada una de las actividades diseñadas por sesión de trabajo, y utilizando los recursos establecidos en la planificación general.

En tal sentido, se establece que la administración de la propuesta se efectúe en el contexto de estudio de forma flexible, ya que el profesorado de matemáticas podría realizar adecuaciones en las estrategias diseñadas, según sean las necesidades y/o características del grupo de niños que se atiende. A su vez, el ritmo de implementación de esta intervención educativa ha de ser continuo, a fin de aprovechar las bondades didácticas del origami para la enseñanza de geometría en cursos sucesivos, teniendo en cuenta las actualizaciones curriculares que se susciten en el medio para incorporar modificaciones o ajustes pertinentes a la propuesta. Igualmente, se

propone una duración específica para las actividades, de tal manera que se cumplan las evaluaciones finales y, a partir de ello, someter a valoración general el diseño.

En lo concerniente con el contenido de la propuesta, se consideran los estándares del MEN (2006) para los grados de primero a tercero, específicamente en el área de Pensamiento métrico, Pensamiento Geométrico. A tales efectos, las actividades a implementar en las unidades de aprendizaje se corresponden con el modelo teórico de Van Hiele (1999) para el desarrollo del pensamiento geométrico.

De dicho modelo, se establecen tres primeros niveles como elementos clave para la propuesta, las cuales han sido descritas previamente: razonamiento, análisis y relaciones, clasificación y ordenamiento, a ser trabajados en el aula de matemáticas con la aplicación manual del papel. Concretamente, las estrategias y actividades diseñadas para facilitar el desarrollo del pensamiento geométrico en los estudiantes mediante el uso del origami se muestran seguidamente en el Cuadro 1.

**Cuadro 1.**

*Estrategias y actividades de la secuencia didáctica*

Tipo de estrategia	Estrategia	Actividad	Descripción	Recurso	Tiempo
Apoyo al aprendizaje	<ul style="list-style-type: none"> <li>Anunciar a los estudiantes sobre los objetivos de la secuencia didáctica, metodología de estudio y resultados de aprendizaje esperados.</li> </ul>	Bienvenida y socialización de saberes previos	El docente brinda información general a los estudiantes respecto a los aspectos formales de las sesiones, y estimula la participación de los niños en una dinámica inicial para comprobar conocimientos previos en el área de geometría.	<ul style="list-style-type: none"> <li>Papel iris / block de construcción.</li> <li>Pitillos.</li> <li>Documentos y fotocopias.</li> <li>Material escolar.</li> <li>Computador.</li> <li>Proyector.</li> <li>Bocinas.</li> <li>Conexión a internet.</li> <li>Videos tutoriales.</li> <li>Pizarra / marcador.</li> <li>Cuadernos.</li> <li>Formatos.</li> <li>Aula de clases.</li> </ul>	16 horas.
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Motivar al grupo hacia el aprendizaje de las matemáticas vista como ciencia aplicada para la vida, mediante el juego.</li> </ul>	Dinámica rompe hielo	Esta actividad se corresponde con el primer momento de la secuencia didáctica, donde el docente motiva a los estudiantes a participar en un juego de carácter lógico-matemático, para estimular a los niños hacia el aprendizaje y valorar las aplicaciones que tienen las ciencias matemáticas para la vida cotidiana.		
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Dar a conocer los distintos temas sobre geometría, relacionados con los objetos sólidos platónicos y sus atributos.</li> </ul>	Explicación de temas por parte del docente	En esta actividad el docente ilustra a los estudiantes sobre cada tema de estudio, según unidad de aprendizaje, a la vez que incita al intercambio de opiniones entre ellos.		
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Mostrar el procedimiento específico para la confección de figuras geométricas en papel.</li> </ul>	Prácticas guiadas de origami	El docente se apoya en material referencial para mostrar la secuencia de pasos para la construcción de modelos tridimensionales en papel, y propone la realización de los pasos en el aula.		
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Aplicar diferentes ejercicios de acuerdo con el nivel de razonamiento trabajado en las unidades.</li> </ul>	Ejercicios propuestos por nivel de razonamiento	El docente propone el desarrollo de test breves al término de cada unidad de aprendizaje, con el propósito de valorar los aprendizajes de cada estudiante. Cada test corresponde con un nivel del modelo de Van Hiele (nivel I, II, III).		
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Aplicar prueba escrita individual que recoja los contenidos vistos en las sesiones.</li> </ul>	Aplicación de prueba escrita final	El docente aplica un test escrito durante la última sesión de clases, a fin de someter a evaluación los conocimientos adquiridos por		

Tipo de estrategia	Estrategia	Actividad	Descripción	Recurso	Tiempo
			el estudiante sobre geometría y comprobar el nivel de competencias alcanzado.		
Trabajo colaborativo (interacción y comunicación)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Formar grupos de estudiantes para la realización de creaciones artísticas de objetos sólidos con papel dentro del aula.</li> <li>• Promover el diálogo entre los estudiantes para compartir ideas sobre los contenidos, motivados por el docente.</li> <li>• Formular preguntas relacionadas con los contenidos, a fin de motivar la participación activa y curiosidad en el aula.</li> </ul>	Conformación de equipos de trabajo	En esta actividad el docente organiza grupos de 3-4 estudiantes para motivar el aprendizaje cooperativo en el aula de matemáticas, al crear figuras geométricas en papel de forma colaborativa, bajo supervisión del docente.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Documentos y fotocopias.</li> <li>• Material escolar.</li> <li>• Pizarra / marcador.</li> <li>• Cuadernos.</li> <li>• Formatos.</li> <li>• Aula de clases.</li> </ul>	10 horas.
		Discusiones dirigidas	El docente estimula a la participación de cada estudiante durante el desarrollo de las sesiones, para comprobar el grado de comprensión y asimilación de contenidos.		
		Preguntas de control	En esta actividad el docente realiza diferentes interrogantes sobre los temas expuestos e invita a los estudiantes a que formulen sus propias preguntas sobre el tema, proponiendo la búsqueda en otras referencias e indagación.		
Trabajo autónomo	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Enviar al estudiante la documentación de referencia sobre procedimientos de origami y material de estudio complementario para su lectura.</li> <li>• Informar al estudiante acerca de las tareas que debe realizar en casa, estableciendo medios para la interacción y seguimiento.</li> </ul>	Compartir documentos	En esta actividad el docente diseña y/o selecciona materiales de apoyo al aprendizaje del estudiante en cuanto a la relación del origami y geometría.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Papel iris.</li> <li>• Documentos y fotocopias.</li> <li>• Material escolar.</li> <li>• Computador.</li> <li>• Conexión a internet.</li> <li>• Videos.</li> </ul>	4 horas.
		Asignación de tareas	El docente asigna tareas sencillas relacionadas con los temas vistos en las sesiones, a fin que el estudiante pueda estudiar de manera independiente ciertos contenidos y activar el aprendizaje por descubrimiento. Asimismo, en esta actividad el docente establece mecanismos para llevar el seguimiento del estudiante y revisar las tareas propuestas.		

## **Factibilidad**

Toda propuesta ha de ser sometida a un estudio de factibilidad, mediante el cual se lleve a cabo el análisis minucioso del contexto seleccionado para la investigación, valorando las condiciones iniciales, así como las estrategias favorables que se deberán desarrollar para cumplir con los objetivos establecidos en el trabajo. Con relación a la factibilidad de la propuesta, Duvergel y Argota (2017) refieren que la factibilidad corresponde con las posibilidades que se tienen para lograr un proyecto y/o propuesta determinada.

Dicho esto, para la presente propuesta se plantea el análisis de factibilidad en aras de determinar, desde varias perspectivas, si la idea general de la intervención resulta viable en el ámbito de acción. En este orden, se plantean aquellos criterios de factibilidad que aplican dentro del sitio de aplicación, teniendo en cuenta la naturaleza del conocimiento, propósitos y objetivos del estudio, a saber, se especifica la factibilidad técnica, operativa, financiera (económica), legal y social.

Primeramente, la factibilidad técnica de la propuesta está relacionada con las condiciones materiales, físicas-químicas para producir los bienes que se proponen con la puesta en marcha del proyecto (Sapag, Sapag, & Sapag, 2014). Para el presente caso, el profesorado de matemáticas y los estudiantes del tercer grado cuentan con los recursos y material convencional, que se proveen desde el instituto, ya que dichos recursos son asequibles. También, en la IEDAU se cuenta con los componentes tecnológicos para la proyección de videos, cobertura a internet para consultas y acceso a impresoras. A partir de estas condiciones, se indica que la propuesta es factible desde la perspectiva técnica.

Seguidamente, en cuanto a la factibilidad operativa es necesario que se definan si en el contexto de aplicación existen las condiciones mínimas necesarias (tanto en lo estructural como en lo funcional) a través de las cuales se garantice la implementación (Sapag, Sapag, & Sapag, 2014). Para la presente propuesta se establece el aula tradicional con incorporación de

herramientas de información de apoyo al docente, desde la modalidad de estudios presenciales. Así, en cuanto a la infraestructura, las condiciones actuales del aula donde se imparte matemáticas cuentan con el mobiliario requerido, acceso a literaturas sugeridas por el docente, pizarras, entre otros recursos que funcionan correctamente; asimismo, se cuenta con personal docente con experiencia en la asignatura y personal colaborador. Por estas razones, puede afirmarse que la propuesta es factible operativamente.

En lo que respecta a la factibilidad legal, dentro de la propuesta se debe considerar la existencia de determinadas restricciones desde el carácter normativo o regulatorio del sistema, que pueda impedir la ejecución del proyecto, así como la mención de leyes que amparen su desarrollo (Sapag, Sapag, & Sapag, 2014). Para esta secuencia didáctica no hay presencia de normativa legal que imponga restricciones al estudio, de hecho, al ser una propuesta de intervención educativa se ampara en la Ley General de Educación (Congreso de la República de Colombia, 1994) que establece en su Artículo 21 los objetivos específicos de la educación básica en el ciclo de primaria, donde se incluye la necesidad de desarrollar conocimientos matemáticos para manejar procesos lógicos desde el aula formal. Por lo tanto, se considera que la propuesta es legalmente factible.

Por su parte, mediante la factibilidad financiera se estipulan los costos operativos y se busca establecer si se cuenta con los recursos económicos necesarios para la implementación y mantenimiento de la propuesta (Sapag, Sapag, & Sapag, 2014). En esta propuesta la estructura de costos está cubierta por la institución educativa, quienes administran los servicios varios, además, en cuanto al material requerido para las prácticas de origami, el material de papelería no representa altos gastos y podrán ser asumidos por la comunidad de aprendizajes (profesores, padres y representantes, institución), por tanto, puede señalarse que la propuesta cumple con la factibilidad financiera.

## **Plan de acción**

En este apartado se lleva a cabo el diseño de las actividades propuestas en el plan de acción presentado en el Cuadro 2, enmarcadas en el desarrollo del pensamiento geométrico en el estudiantado del tercer grado de la IEDAU, según los primeros niveles del modelo de Van Hiele (1999) mediados por la práctica manual del origami para el aprendizaje de geometría. La propuesta está comprendida por una serie de sesiones a desarrollar dentro del aula de matemáticas. En cuanto a la temporalización de la secuencia didáctica, la misma se establece en una duración total de cinco semanas, que iniciarán en el periodo escolar 2022, entre los meses de agosto y septiembre.

Asimismo, las actividades que integran la propuesta están diseñadas para trabajar tres niveles del modelo en el aula presencial, por cuanto, se administran tres unidades de aprendizaje por nivel de pensamiento geométrico, entre cinco a seis horas semanales distribuidas en dos sesiones por semana académica, en horario comprendido de 1:30 p.m. a 4:30 p.m., los días martes y jueves respectivamente, donde se busca que los niños comprendan las bases geométricas y practiquen el arte del origami dentro de un espacio dinámico en el aula de matemáticas.

En este orden, para la primera unidad se planifican ocho horas de duración, a ser desarrolladas la primera semana para la concreción de habilidades asociadas con el razonamiento lógico; luego, se desarrolla la segunda unidad con 10 horas para el análisis de datos sobre figuras geométricas sencillas, durante la segunda semana académica; se culmina con las sesiones de clasificación y ordenamiento durante la tercera semana, con 12 horas de trabajo, para un total de 30 horas.

## Cuadro 2.

### Plan de acción de la secuencia didáctica.

Semana	Actividad	Descripción	Recursos	Evaluación
1	Bienvenida y socialización de saberes	-El docente introduce los contenidos y objetivos de la secuencia didáctica. -Aplica evaluación diagnóstica inicial a través de la formulación de preguntas sobre geometría básica (Anexo 1).	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pizarra / marcadores.</li> <li>• Documentos.</li> <li>• Guía de preguntas.</li> </ul>	-Diagnóstico. -Lista de cotejo.
1	Dinámica rompe hielo	-El docente explica la importancia que tiene el aprendizaje de las matemáticas para la vida cotidiana, mediante ejemplos en contextos sencillos (mercado, hogar, juegos de mesa, etc.), así como nociones geométricas y espaciales (viajes, distancias, medidas). -Se reparte un modelo de Tangram en papel para que cada estudiante recorte las piezas y elabore ciertos patrones, mientras el docente hace preguntas sobre las diferentes formas geométricas que los niños puedan reconocer. -Por cada 2 minutos, el docente invita a los estudiantes a intercambiar sus modelos en papel para que puedan terminar el trabajo iniciado por sus pares y supervisa el desempeño de los niños en el aula.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Material escolar.</li> <li>• Formatos y fotocopias.</li> <li>• Pizarra / marcadores.</li> </ul>	-Evaluación formativa. -Lista de cotejo.
1	Compartir documentos	-El docente envía material informativo de interés respecto a las relaciones entre el origami y la geometría, a su vez, se asignan lecturas complementarias para discutir en el aula y ampliar los contenidos.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Documentos y fotocopias.</li> <li>• Computador.</li> <li>• Conexión a internet.</li> </ul>	-Lista de cotejo. -Evaluación formativa.
2	Discusiones guiadas	-Se invita al estudiante a la participación mediante lluvias de ideas acerca de las características, formas y propiedades de los sólidos.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Material escolar.</li> <li>• Formatos y fotocopias.</li> <li>• Pizarra / marcadores.</li> </ul>	-Lista de cotejo. -Evaluación formativa.
2	Preguntas de control	-De manera cíclica, el docente formula diferentes preguntas abiertas al grupo, según contenidos y nociones expuestas en clases para incentivar la atención del estudiante. -Se trabaja con sistemas de recompensa por respuestas y participaciones de los niños, además de complementar ideas entre ellos, para promover el aprendizaje colaborativo en el aula.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Material escolar.</li> <li>• Formatos y fotocopias.</li> <li>• Pizarra / marcadores.</li> </ul>	-Lista de cotejo. -Evaluación formativa.
2-3-4	Explicación de temas	-El docente explica los temas de acuerdo con las unidades de aprendizaje que estructuran la intervención, respecto a las generalidades de la geometría euclidiana y los objetos sólidos a	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Material escolar.</li> <li>• Formatos y fotocopias.</li> <li>• Pizarra / marcadores.</li> </ul>	-Evaluación formativa. -Lista de cotejo.

		<p>estudiar.</p> <p>-Se invita a los estudiantes a realizar dibujos en papel sobre formas geométricas bidimensionales y señalar características y atributos de cada una.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Folios de papel.</li> <li>• Cuaderno de apuntes.</li> </ul>	
2-3-4	Prácticas guiadas de origami	<p>-Construcción y diseño de figuras tridimensionales en papel, según procedimientos mostrados en los tutoriales de origami y seguidos por el docente, para la elaboración de los cinco sólidos platónicos (Anexo 2).</p> <p>-Realización de diversas secuencias de procedimientos mediante la papiroflexia, a la vez que el docente da a conocer elementos geométricos asociados con cada figura durante el desarrollo de cada una de las unidades de aprendizaje de la propuesta (Anexos 3, 4, 5).</p> <p>-Al finalizar cada práctica, los estudiantes muestran sus trabajos ante el docente y sus pares.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Material escolar.</li> <li>• Formatos y fotocopias.</li> <li>• Pizarra / marcadores.</li> <li>• Papel iris / block de construcción.</li> <li>• Pitillos.</li> <li>• Computador.</li> <li>• Proyector.</li> <li>• Bocinas.</li> <li>• Conexión a internet.</li> <li>• Videos tutoriales.</li> </ul>	<p>-Lista de cotejo.</p> <p>-Evaluación formativa.</p>
3-4-5	Ejercicios propuestos por nivel de razonamiento	<p>-Al término de cada unidad de aprendizaje, el docente propone a la clase el desarrollo de ejercicios sencillos por temas, según cada uno de los niveles del pensamiento geométrico I, II y III propuestos por Van Hiele (Anexos 6, 7, 8).</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Material escolar.</li> <li>• Formatos y fotocopias.</li> <li>• Pizarra / marcadores.</li> </ul>	<p>-Lista de cotejo.</p> <p>-Evaluación sumativa.</p>
4	Conformación de grupos	<p>-Se establece la formación de equipos de 3-4 estudiantes para realizar ejercicios prácticos con papel plegado.</p> <p>-El docente acompaña a los equipos en la actividad, donde deben realizar figuras libres en papel.</p> <p>-Los equipos conformados deben presentar brevemente sus resultados frente a los compañeros al término de la sesión, mientras el resto de la clase interviene en la coevaluación entre pares (Anexo 9).</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Material escolar.</li> <li>• Formatos y fotocopias.</li> <li>• Pizarra / marcadores.</li> <li>• Papel iris / block de construcción.</li> </ul>	<p>-Lista de cotejo.</p> <p>-Evaluación formativa.</p> <p>-Heteroevaluación.</p> <p>-Coevaluación.</p>
4	Asignación de tareas	<p>-El docente indica la realización de tareas sencillas relacionadas con los temas vistos en clases.</p> <p>-Revisión de actividades desarrolladas de forma autónoma durante las sesiones consecutivas de clases.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Papel iris / block de construcción.</li> <li>• Material escolar.</li> <li>• Documentos y fotocopias.</li> <li>• Computador.</li> <li>• Conexión a internet.</li> <li>• Videos tutoriales.</li> </ul>	<p>-Lista de cotejo.</p> <p>-Evaluación formativa.</p>

5	Aplicación de prueba escrita final	<p>-Al término de las sesiones prácticas, los estudiantes deben presentar una prueba escrita individual que abarca los conocimientos de geometría vistos en clases (Anexo 10).</p> <p>-El docente organiza la clase y supervisa la aplicación de la evaluación.</p> <p>-El docente utiliza una lista de cotejo como instrumento de control de las actividades que integran la secuencia didáctica (Anexo 11).</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Formatos y fotocopias.</li> <li>• Material escolar.</li> </ul>	<p>-Evaluación sumativa.</p> <p>-Lista de cotejo.</p> <p>-Hetero-evaluación.</p>
---	------------------------------------	---	---	--

## Sistema de evaluación

El sistema de evaluación aplicado para esta propuesta consta de la implementación de una prueba de salida, la cual servirá para la determinación de los indicadores de aprendizajes obtenidos por los estudiantes de tercer grado, el cual, a su vez, permitirá comprobar si se cumple con la hipótesis planteada. De esta manera, se evaluará la asimilación de competencias geométricas al final de cada actividad, disponiendo de instrumentos como el cuestionario y preguntas de énfasis geométrico (características, forma, tamaño, aristas, lados, caras) por cada figura realizada en papel.

Por otra parte, se establece la evaluación formativa a lo largo de las sesiones que componen la propuesta, y la evaluación sumativa final mediante prueba escrita de geometría, asimismo, se plantea llevar a cabo una etapa de valoración diagnóstica inicial, a fin de determinar los saberes previos de los estudiantes respecto a las nociones básicas de matemáticas, a través de la aplicación de preguntas en el aula, aunado con la heteroevaluación del docente, así como la coevaluación entre grupos durante las actividades prácticas con origami. De esta forma, el sistema de evaluación por sesiones de trabajo según la distribución de las unidades de aprendizaje de esta propuesta, se presentan en el Cuadro 3.

### Cuadro 3.

*Distribución temporal de las unidades y evaluaciones.*

N° Semana	N° Sesión	Unidad	Nivel	Duración	Horario	Descripción	Evaluación
1	1	Unidad I. Introducción a las figuras bidimensionales y sólidos platónicos.	I. Reconocimiento / razonamiento.	3 horas	Martes y jueves (1:30 p.m. - 4:30 p.m.).	Dinámica inicial con Tangram y construcción de cuerpos geométricos: cubo o hexaedro.	Diagnóstica. Formativa.
1	2			3 horas		Construcción de cuerpos geométricos: tetraedro.	Formativa.
2	3			2 horas	Martes y jueves	Actividad propuesta nivel I.	Sumativa.

N° Semana	N° Sesión	Unidad	Nivel	Duración	Horario	Descripción	Evaluación
					(1:30 p.m. - 3:30 p.m.).		
2	4	Unidad II. Atributos, características y propiedades de las figuras.	II. Análisis.	3 horas	Martes y jueves (1:30 p.m. - 4:30 p.m.).	Construcción de cuerpos geométricos: octaedro.	Formativa.
3	3 horas			Construcción de cuerpos geométricos: dodecaedro.			
3	6			4 horas	Martes y jueves (1:30 p.m. - 5:30 p.m.).	Actividad propuesta nivel II.	Sumativa.
4	7	Unidad III. Simetrías en diferentes aspectos del diseño.	III. Relaciones, clasificaciones u ordenamiento.	3 horas	Martes y jueves (1:30 p.m. - 4:30 p.m.).	Construcción de cuerpos geométricos: icosaedro.	Formativa.
4	8			3 horas		Construcción de cuerpos geométricos: figuras al azar.	Formativa. Co-evaluación.
5	9			3 horas		Actividad propuesta nivel III.	Sumativa.
5	10			3 horas		Prueba escrita final	Sumativa.

En lo que respecta al instrumento de evaluación, se aplicará la entrevista socrática. Esta entrevista corresponde con el proceso desarrollado por el investigador a fin de caracterizar los descriptores para cada uno de los niveles de razonamiento de los estudiantes del grado, la cual se denominó: Guion de entrevista clínica de carácter socrático para la comprensión de la fórmula de Euler, a través de la construcción de los sólidos platónicos en origami en el contexto de Van Hiele. El objeto de esta actividad es obtener en primera instancia, la información escrita que aporten los sujetos que están siendo investigados de forma espontánea, para analizarla y consecuentemente realizar una interpretación rigurosa al efectuar la triangulación de los datos obtenidos.

## Referencias bibliográficas del programa

- Amaya, T., & Gulfo, D. (2009). *El origami, una estrategia para la enseñanza de la geometría*. Uniandes. <http://funes.uniandes.edu.co/4919/1/AmayaElorigamiAlme2009.pdf>
- Blanco, C., & Otero, T. (2005). *Geometría con papel (papiroflexia matemática)*. SCTM05 Sociedad, Ciencia, Tecnología y Matemáticas. <https://docplayer.es/7016441-Geometria-con-papel-papiroflexia-matematica.html>
- Congreso de la República de Colombia (8 de febrero de 1994). Ley General de Educación. [https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-85906\\_archivo\\_pdf.pdf](https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-85906_archivo_pdf.pdf)
- Duvergel, Y., & Argota, L. (2017). Estudio de factibilidad económica del producto sistema automatizado cubano para el control de equipos médicos. *3C Tecnología: Glosas de Innovación Aplicadas a la PYME*, 6(4), 46-63. <http://dx.doi.org/10.17993/3ctecno.2017.v6n4e24.46-63>
- Galindo, E. (2021). *Uso de las TIC como estrategias didácticas en el área de matemáticas de estudiantes de grado 4° de La Institución Educativa La Popa, la Tebaida Quindío Colombia*. [Tesis de maestría, Corporación Universitaria Minuto de Dios]. <https://hdl.handle.net/10656/13102>
- Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación ICFES (2019). *Reporte histórico de resultados pruebas Saber 3, 5 y 9*. <http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/seleccionReporte.jsp>
- Mejía, H., & Prada, A. (2008). *El origami como recurso didáctico para la enseñanza de la geometría*. Uniandes. <http://funes.uniandes.edu.co/992/1/31Taller.pdf>
- Ministerio de Educación Nacional MEN (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden*. Revolución Educativa.
- Ortiz, W., Enrique, F., & García La Rosa, J. (2018). Pre-experimento para constatar cambios al

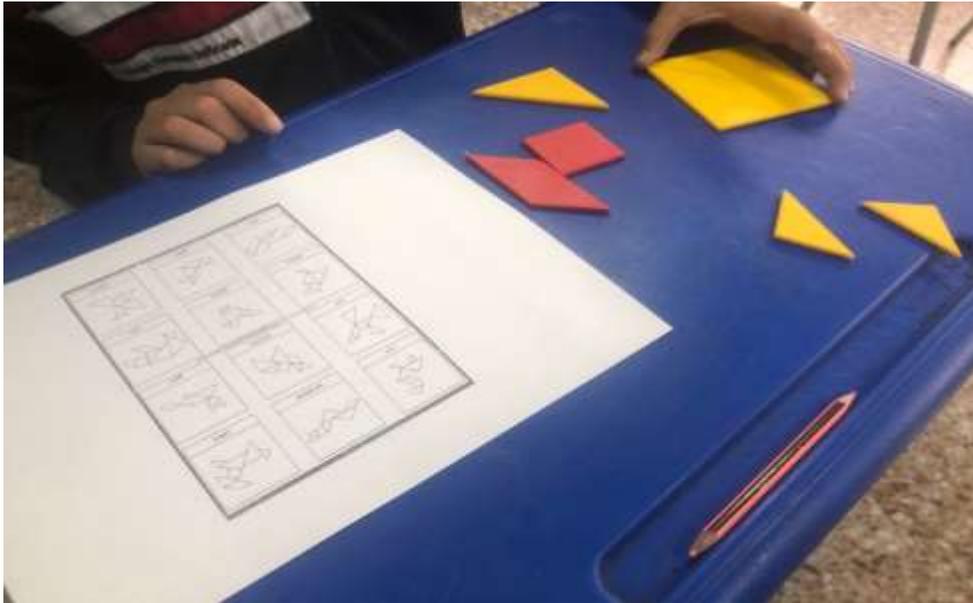
- aplicar un resultado científico. Ejemplo práctico de una metodología para mejorar el desarrollo de habilidades del pensamiento Geométrico Espacial. *Opuntia Brava*, 10(3), 329-346. <https://opuntiabrava.ult.edu.cu/index.php/opuntiabrava/article/view/563>
- Pineda Ballesteros, E., & Téllez Acuña, F. (2019). Club de matemáticas para la resolución de problemas usando representaciones múltiples. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, (58),162-179. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=194260979010>
- Rodríguez, A. (2014). *Elaboración de un Objeto Virtual de Aprendizaje (OVA), que integre el origami como facilitador de la enseñanza de los sólidos en geometría*. Universidad Nacional de Colombia. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/5277>
- Urquina, H. (Ed.). (2004). *Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales*. Ministerio de Educación Nacional, Enlace Editores.
- Van Hiele, P.M. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching Children Mathematics*, 5(6), 310-316. [https://www.numbersense.co.za/wp-content/uploads/2020/07/Van-Hiele\\_learning-through-play.pdf](https://www.numbersense.co.za/wp-content/uploads/2020/07/Van-Hiele_learning-through-play.pdf)

## Anexo 5. Registro fotográfico

---

**Figura 1**

*Entrega de figuras y Set de Tangram*



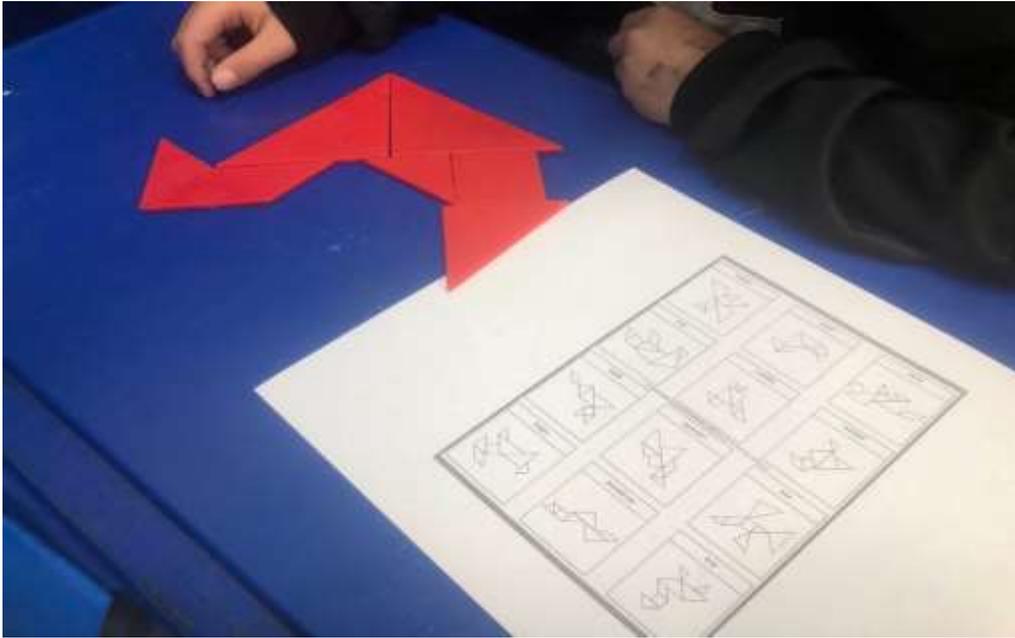
**Figura 2**

*Organización de espacios para el trabajo con Tangram*



**Figura 3**

*Trabajo con Tangram*



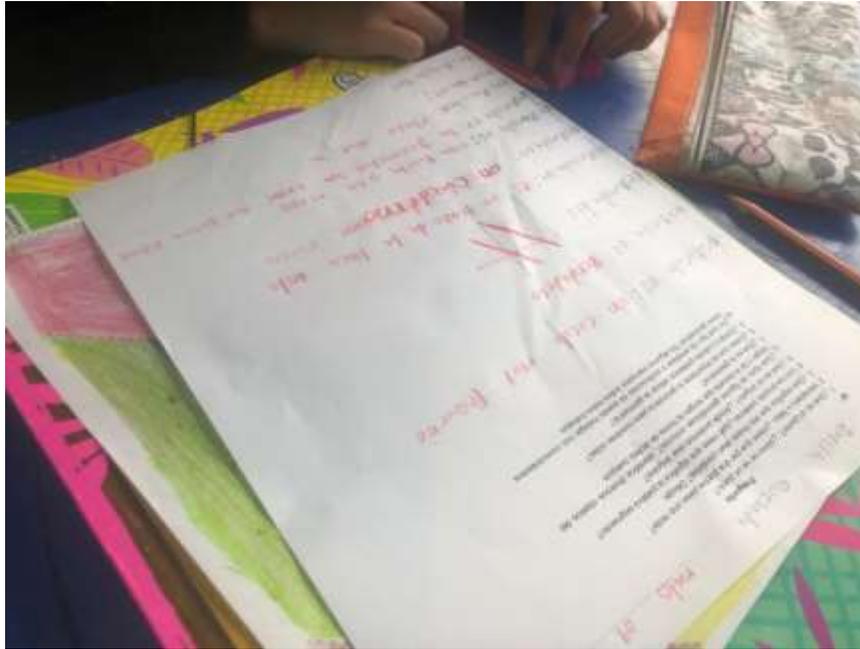
**Figura 4**

*Construcción de modelos con Tangram*



**Figura 5**

*Aplicación de guía de preguntas*



**Figura 6**

*Ejercicios de plegado en casa*



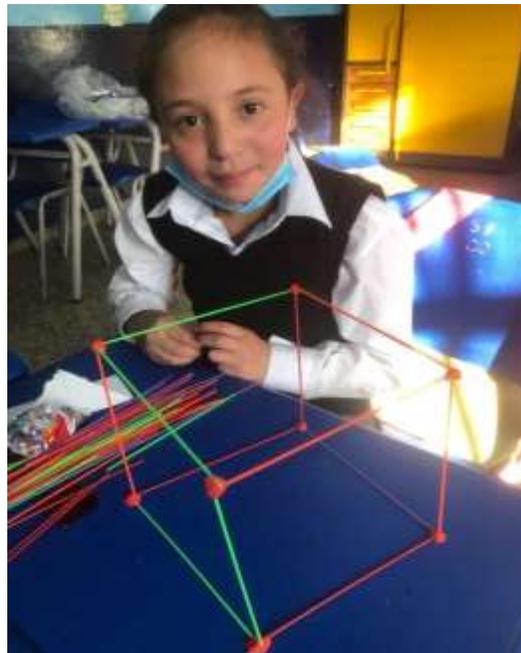
**Figura 7**

*Trabajo con pitillos*



**Figura 8**

*Construcción de modelos con pitillos*



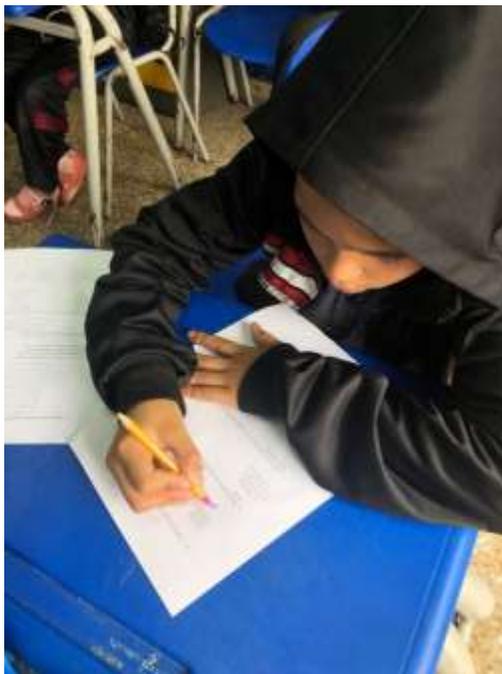
**Figura 9**

*Aplicación del Pretest*



**Figura 10**

*Aplicación del Pretest*



**Figura 11**

*Aplicación del Pretest*



**Figura 12**

*Prácticas guiadas sobre el plegado de papel*



**Figura 13**

*Producciones con plegado de papel*



**Figura 14**

*Prácticas guiadas sobre el plegado de papel*



**Figura 15**

*Elaboración de sólidos en papel*



**Figura 16**

*Elaboración de sólidos en papel*



**Figura 17**

*Elaboración de sólidos en papel*



**Figura 18**

*Procedimientos para la construcción de sólidos en papel*



**Figura 19**

*Procedimientos para la construcción de sólidos en papel*



**Figura 20**

*Procedimientos para la construcción de sólidos en papel*



**Figura 21**

*Proyección de secuencias para la construcción de modelos*



**Figura 22**

*Proyección de secuencias para la construcción de modelos*



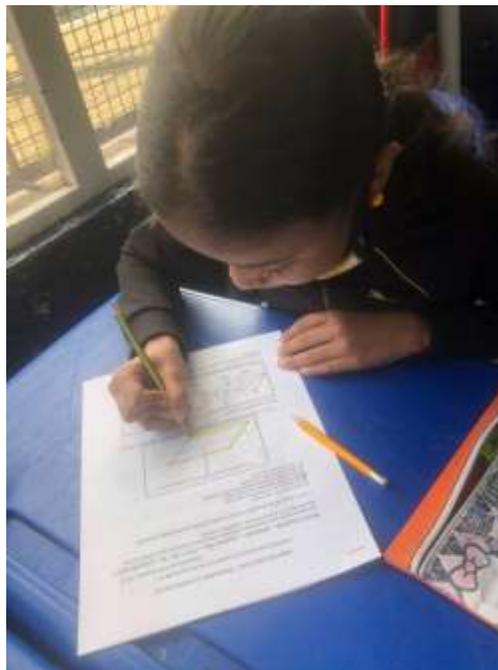
**Figura 23**

*Proyección de secuencias para la construcción de modelos*



**Figura 24**

*Aplicación de evaluativo durante el Programa*



**Figura 25**

*Prácticas guiadas de papiroflexia*



**Figura 26**

*Prácticas guiadas de papiroflexia*



**Figura 27**

*Producciones en papiroflexia*



**Figura 28**

*Elaboración y exposición de sólidos en papel*



**Figura 29**

*Producciones en papiroflexia*



**Figura 30**

*Producciones en papiroflexia*



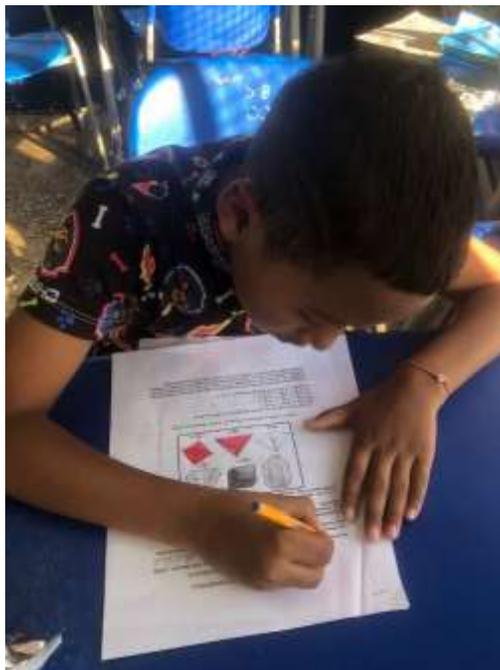
**Figura 31**

*Aplicación del Postest*



**Figura 32**

*Aplicación de prueba escrita*





## Anexo 7 Tablas de datos

### Prueba piloto y confiabilidad KR-20

PRUEBA DE KUDER-RICHARDSON																				
SUJETOS	ITEMS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	SUMATORIA
1		1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	14
2		1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	14
3		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	18
4		1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	6
5		1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	13
6		1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	12
7		1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	10
8		1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	13
9		1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	13
10		1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	5
11		1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	12
12		1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	10
13		1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	10
14		1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	13
15		1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	11
p		1,00	0,80	0,53	1,00	0,67	0,27	0,80	0,27	0,40	0,87	0,47	0,80	0,80	0,67	0,53	0,67	0,13	1,00	
q		0,00	0,20	0,47	0,00	0,33	0,73	0,20	0,73	0,60	0,13	0,53	0,20	0,20	0,33	0,47	0,33	0,87	0,00	
pq		0,00	0,16	0,25	0,00	0,22	0,20	0,16	0,20	0,24	0,12	0,25	0,16	0,16	0,22	0,25	0,22	0,12	0,00	

sujetos	cantidad de sujetos	15
Σp.q	sumatoria de pq	2,92
st <sup>2</sup>	varianza de la prueba	8,756
k	numero de ítems	20

$$KR_{20} = \frac{k}{k-1} * \frac{st^2 - \sum p.q}{st^2}$$
  

KR20 =	0,702
--------	-------

**K**=número de ítems del instrumento.  
**p**=personas que responden afirmativamente a cada ítem.  
**q**=personas que responden negativamente a cada ítem.  
**St<sup>2</sup>**= varianza total del instrumento

### Pretest Grupo Control

Caso	ITEMS																		Puntaje total
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	10
2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	6
3	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	9
4	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	8
5	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	7
6	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	9
7	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	7
8	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	8
9	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	6
10	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
11	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	6
12	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	6
13	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	9
14	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	8
15	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	7
16	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	8
17	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	6
18	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	6
19	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
20	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	9
21	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	6
22	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	6
23	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	7
24	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	6
25	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	8

### Pretest Grupo Experimental

Caso	ITEMS																		Puntaje total
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	4
2	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	9
3	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	10
4	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	11
5	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	5
6	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	7
7	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	7
8	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	6
9	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	9
10	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	5
11	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	10
12	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	6
13	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	8
14	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	5
15	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	7
16	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	7
17	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	5
18	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	9
19	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	9
20	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	10
21	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	5
22	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	6
23	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	7
24	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	6
25	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	4

### Postest Grupo Control

Caso	ITEMS																		Total	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18		
1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	10
2	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	6
3	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	11	
4	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	9	
5	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	9	
6	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	9	
7	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	6	
8	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	5	
9	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	3	
10	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	8	
11	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	4	
12	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	10	
13	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	12	
14	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	8	
15	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	10	
16	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	5	
17	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	3	
18	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	10	
19	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	8	
20	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	11	
21	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	5	
22	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	10	
23	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	6	
24	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	13	
25	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	9	

### Postest Grupo experimental

Caso	ITEMS																		Total
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	18
2	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	16
3	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	14
4	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	17
5	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	13
6	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	13
7	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	16
8	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	10
9	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	14
10	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	8
11	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	9
12	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	15
13	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	16
14	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	16
15	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	9
16	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	14
17	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	8
18	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	15
19	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	16
20	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	18
21	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	16
22	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	12
23	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	14
24	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	17
25	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	13